

D'ORDRE:

1238

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. SAMUEL LATTÈS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE D'AIX.

1^{re} THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES, ETC.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 juin 1906 devant la Commission d'Examen.

MM. KÖNIGS, *Président.*

PAINLEVÉ
HADAMARD } *Examineurs.*

MILAN,

IMPRIMERIE REBESCHINI DE TURATI & C.

Rue Rovello, 14-16.

1906

N° D'ORDRE :

1238

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. SAMUEL LATTÈS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE D'AIX.

1^{re} THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES, ETC.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

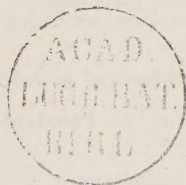
Soutenues le 19 juin 1906 devant la Commission d'Examen.

MM. KENIGS, *Président.*

PAINLEVÉ

HADAMARD

} *Examineurs.*



MILAN,

IMPRIMERIE REBESCHINI DE TURATI & C.

Rue Rovello, 14-16.

1906

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	P. APPELL, <i>Professeur</i> .	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX	Géométrie supérieure
PROFESSEURS HONORAIRES	L. TROOST	
	CH. WOLF	
	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique
	BOUSSINESQ.	Physique mathématique et calculs des probabilités.
	PICARD.	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et mécanique céleste.
	Y. DELAGE	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	KÖENIGS.	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
PROFESSEURS.	GOURSAT.	Calcul différentiel et calcul intégral.
	CHATIN.	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Physique. id.
	WALLERANT.	Minéralogie.
	ANDOYER.	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	P. CURIE	Physique.
	TANNERY.	Calcul différentiel et calcul intégral.
	RAFFY	Application de l'analyse à la géométrie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	N	Chimie biologique.
	N	Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
	PUISEUX	Mécanique et astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	LEDUC	Physique.
PROFESSEURS ADJOINTS	HADAMARD.	Calcul différentiel et calcul intégral.
	MATRUCHOT.	Botanique.
	MICHEL	Minéralogie.
	DAGUILLON.	Botanique.
	BOUVEAULT.	Chimie organique.
	BOREL	Théorie des fonctions.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

A MA MÈRE



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556022_0013

A
MONSIEUR HADAMARD

Hommage reconnaissant
S. LATTÈS.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES QUI DÉFINISSENT UNE COURBE OU UNE SURFACE INVARIANTE PAR UNE TRANSFORMATION

INTRODUCTION.

1. Les équations fonctionnelles sont, dans le sens le plus général, des équations définissant des fonctions inconnues par des relations entre ces fonctions inconnues et des fonctions données.

Il existe bien des catégories d'équations fonctionnelles suivant la nature de ces relations. Une première classe par exemple est constituée par les équations différentielles. D'autres équations, étudiées par divers géomètres, forment une deuxième classe : ce sont celles qui définissent une fonction inconnue par les valeurs que prennent certaines intégrales définies dépendant de cette fonction.

On peut concevoir encore bien d'autres espèces d'équations fonctionnelles : mais, si on excepte les deux classes précédentes, il semble que les équations fonctionnelles étudiés jusqu'ici aient été surtout celles qui définissent les fonctions inconnues par des égalités entre les valeurs de ces fonctions et les valeurs qu'elles prennent lorsqu'on y remplace les variables par des fonctions connues ou même inconnues des mêmes variables. Divers géomètres se sont occupés des équations de cette nature : je citerai, sur ce sujet, les travaux d'ABEL (*) et de MM. KÖNIGS (**), GRÉVY (***), LEAU (****), BOURLET (*****).

(*) *Œuvres complètes*, t. II, pag. 36.

(**) *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bullet. des Sciences mathém.es, 1883). — *Recherches sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'École Normale, 1884). — *Nouvelles recherches sur les équat. fonctionnelles* (Annales de l'École Normale, 1885).

(***) *Sur les équat. fonctionnelles* (Annales de l'École Normale, 1894).

(****) *Étude sur les équat. fonctionnelles à une ou à plusieurs variables* (Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, tome XI, 1897).

(*****) *Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini* (Annales de l'École Normale, 1897). — *Sur certains équations analogues aux équations différentielles* (Annales de l'École Normale, 1899).

Parmi ces dernières équations, une catégorie particulière importante est formée des équations qui définissent une multiplicité, courbe ou surface, invariante par une transformation.

On sait que la recherche d'une multiplicité invariante par un groupe *continu* de transformations dépend d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. Mais si, au lieu d'un groupe *continu*, on considère une transformation *isolée*, la recherche d'une multiplicité invariante par cette transformation dépend d'*équations fonctionnelles*.

C'est ainsi que les équations suivantes, étudiées par M. KÖNIGS, et où $\psi(x)$ désigne la fonction inconnue :

$$\begin{aligned} \psi[\varphi(x)] &= \psi(x) + a & \psi[\varphi(x)] &= a\psi(x) \\ \psi[\psi(x)] &= f(x) & \psi[f(x)] &= \varphi[\psi(x)] \end{aligned}$$

définissent les courbes $y = \psi(x)$ invariantes respectivement par les transformations ponctuelles suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} X = \varphi(x) \\ Y = y + a \end{cases} & \quad \begin{cases} X = \varphi(x) \\ Y = a y \end{cases} & \quad \begin{cases} X = y \\ Y = f(x) \end{cases} & \quad \begin{cases} X = f(x) \\ Y = \varphi(y) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Le but de ce travail est d'étudier les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation.

Les transformations que j'envisage sont de deux espèces différentes.

Dans la première partie, je considère des transformations ponctuelles à deux ou à trois variables. Soit par exemple :

$$X = f(x, y, z) \quad Y = \varphi(x, y, z) \quad Z = \theta(x, y, z)$$

une transformation à trois variables : une surface $z = \psi(x, y)$ invariante par cette transformation est définie par l'équation fonctionnelle :

$$\psi \left[f(x, y, \psi(x, y)), \varphi(x, y, \psi(x, y)) \right] = \theta(x, y, \psi(x, y)).$$

De même une courbe invariante $y = \psi(x) \quad z = \chi(x)$ est définie par un système de deux équations fonctionnelles à deux fonctions inconnues.

Dans ses travaux sur les équations différentielles, M.^r POINCARÉ a été amené à étudier de cette façon les courbes invariantes par une transformation à deux variables et passant par un point double de la transforma-

tion: il a démontré dans un cas très général l'existence de deux pareilles courbes (*). J'expose la méthode employée par M.^r POINCARÉ en la modifiant de façon à l'étendre aux cas qu'il n'avait pas eu à envisager, pour l'objet qu'il se proposait. J'emploie une méthode analogue pour le cas d'une substitution à trois variables.

Au même ordre d'idées se rattachent plusieurs travaux de M.^r PICARD, dans lesquels ce géomètre a étudié des systèmes d'équations fonctionnelles, définissant des fonctions invariantes par certaines substitutions rationnelles (**).

Dans la deuxième partie, je considère des transformations $(X, Y; x, y, y')$ faisant correspondre à un élément (x, y, y') un point (X, Y) . Soit :

$$X = f(x, y, y') \quad Y = \varphi(x, y, y')$$

une pareille transformation. Une courbe $y = \psi(x)$ invariante par cette transformation est définie par l'équation fonctionnelle :

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi').$$

On est ainsi conduit à une classe d'équations fonctionnelles, contenant la fonction inconnue $\psi(x)$ et sa dérivée $\psi'(x)$. Telle est l'équation :

$$\psi[f(x)] = \psi'(x)$$

que j'étudie, comme exemple, au Chap. IV.

3. J'ai dû me borner à étudier les transformations données et les équations fonctionnelles correspondantes dans le domaine d'un *point double* ou d'un *élément double*.

Pour une transformation ponctuelle par exemple, à un point M pris dans le domaine d'un point double correspond par la transformation un point M' situé dans le même domaine: M.^r POINCARÉ l'appelle le *conséquent* du point M ; le point M est lui-même le conséquent d'un point M'' qui est l'*antécédent* du point M . On est ainsi conduit à étudier la disposition des

(*) *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (4.^e partie, Journal de Liouville, 1886, pages 193-195).

(**) *Sur une classe de transcendentes nouvelles* (Acta Mathematica, tomes 18 et 23). — *Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres* (Bulletin de la Société Mathém. de France 1900). — *Sur certaines équations fonctionnelles, et sur une classe de surfaces algébriques* (Comptes-Rendus de l'Ac. des Science, juillet, 1904).

conséquents et des antécédents successifs d'un point pris dans le domaine du point double: c'est l'étude de *l'itération à plusieurs variables*.

Le cas d'une seule variable a été traité par M.^r KœNIGS (*) dans le cas général, et par M.^{rs} GRÉVY (**) et LEAU (***) dans des cas singuliers (****): c'est cette étude de l'itération à une variable qui est la base des travaux de M.^r KœNIGS sur les équations fonctionnelles.

Pour le cas de plusieurs variables, je dois citer un travail fort important de M.^r LEVI-CIVITA (*****) dans lequel ce géomètre a étudié la stabilité ou l'instabilité d'une transformation ponctuelle dans le domaine d'un point double: il y a stabilité si à tout domaine E pris autour du point double correspond un domaine H entourant le même point et tel que les conséquents et les antécédents de tous les points de H soient tous compris dans E ; il y a instabilité si, aussi petit que soit le domaine H , il y a dans ce domaine un ou plusieurs points dont un antécédent ou un conséquent au moins ne soit pas contenu dans E . M.^r LEVI-CIVITA démontre que l'instabilité est le cas général: il ne peut y avoir stabilité que si les racines de l'équation en S relative au point double (voir Chap. I et II) ont toutes des modules égaux à 1 et même alors M.^r LEVI-CIVITA démontre, du moins dans le cas de deux variables, que la substitution est instable en général.

(*) *Recherches sur les substitutions uniformes* (loc. cit.).

(**) Loc. cit.

(***) Loc. cit.

(****) Je signalerai encore, au sujet de l'itération à une variable, les travaux suivants: LÉMERAY, *Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences*, 14 février 1898, 28 mars 1898, 20 janvier 1899. — *Bulletin de la Société Mathémat. de France*. Tome XXVII (pages 130-137 et 282-285).

BÖTTCHER, *Beiträge zu der Theorie der Iterationsrechnung* (Inaug. Dissert. Leipzig. 1898).

Enfin, on trouvera une bibliographie très étendue relative à l'itération au début du Mémoire suivant, publié en langue russe:

ARISTOF, *Bulletin de la Société phys.-mathém. de Kazan*. Tome X.

(*****) *Sopra alcuni criteri di instabilità* (Annali di Matematica, Serie III, Tome V, 1901) et *Comptes-Rendus*, 9, 16, et 23 juillet 1900). L'auteur a pour but essentiel l'étude de la stabilité des solutions périodiques des systèmes différentiels et l'application au problème des trois corps, mais il ramène la question à celle de la stabilité ou de l'instabilité des transformations ponctuelles et son travail est consacré en grande partie à cette question.

Voir aussi, sur le même sujet, un Mémoire de M.^r CIGALA: *Sopra un criterio di instabilità* (Annali di Matematica, Série III, Tome XI): l'auteur s'occupe de l'instabilité des substitutions, dans le cas, signalé par M.^r LEVI-CIVITA dans son travail, où les racines de l'équation en S ont un module égal à 1 et un argument incommensurable avec 2π .

Me limitant au cas de deux et de trois variables, j'étudie les diverses dispositions possibles pour les antécédents et les conséquents successifs d'un point, du moins dans le cas général. Les résultats auxquels je suis ainsi conduit présentent une analogie frappante avec les résultats auxquels est parvenu M.^r POINCARÉ dans l'étude des courbes intégrales d'une équation différentielle dans le domaine d'un point singulier: c'est ainsi qu'on est amené à classer les points doubles de la transformation en *nœuds*, *cols*, *foyers*. J'explique les raisons de cette liaison entre les deux théories en montrant que, dans le domaine d'un point singulier, l'équation différentielle se présente comme limite d'une équation fonctionnelle définissant une courbe invariante par une transformation ponctuelle qui admet le point singulier pour point double.

4. Pour établir les divers théorèmes d'existence relatifs aux équations fonctionnelles que je considère, j'ai employé, suivant les cas, deux méthodes différentes.

Pour les transformations ponctuelles que j'étudie dans la première partie, je me suis servi surtout de la méthode employée par M.^r POINCARÉ pour le cas relatif à deux variables qu'il a traité: dans cette méthode, basée sur l'emploi de fonctions majorantes, on suppose les données et les solutions cherchées analytiques. Plus récemment, M.^r HADAMARD (*) a traité le cas étudié par M.^r POINCARÉ, sans supposer l'analyticité des données et en faisant seulement quelques hypothèses sur la continuité des fonctions données et de leurs dérivées premières: il emploie pour cela une méthode d'approximations successives qui consiste à partir d'une courbe arbitraire, passant par le point double, à former ses *conséquentes* et ses *antécédentes* successives et à démontrer qu'elles ont des limites qui sont des courbes invariantes. J'utilise les résultats de M.^r HADAMARD pour la recherche des courbes invariantes *analytiques ou non*.

Pour les transformations $(X, Y; x, y, y')$ que j'étudie dans la deuxième partie, j'emploie une méthode d'approximations successives dont le principe est le même que celui de la méthode de M.^r HADAMARD que je viens de signaler: je définis, dans le domaine d'un élément double, les antécédentes successives d'une courbe et je démontre que, sous certaines hypothèses, elles ont une limite qui est une courbe invariante: une de ces hypothèses s'exprime par l'inégalité $|S| < 1$, S étant une certaine quantité dépendant de la

(*) *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles* (Bulletin de la Société Mathématique de France, Comptes-Rendus des séances, 1901).

substitution donnée et des coordonnées de l'élément double. Les résultats sont ainsi établis sans supposer l'analyticité des données; mais la méthode des fonctions majorantes, par laquelle je n'ai pas pu réussir à établir les mêmes résultats, donnerait peut-être un résultat plus complet: je montre en effet sur des exemples qu'il peut y avoir une courbe invariante, même si $|S|$ est supérieur à 1. On est ainsi conduit à se demander si l'introduction de cette quantité S ne tiendrait pas uniquement au mode de démonstration: c'est pourquoi je montre que S est bien un élément essentiel dans la question, en prouvant que c'est un invariant de la transformation donnée pour toute transformation ponctuelle.

5. Je terminerai en analysant brièvement les divers chapitres de ce travail.

Le *Chap. I* est consacré aux transformations à deux variables. Je démontre d'abord le théorème sur l'existence de deux courbes analytiques invariantes passant par le point double; j'examine le cas où la transformation donnée a une infinité de points doubles formant une courbe. Je donne ensuite à la transformation une forme réduite dans laquelle les deux courbes invariantes sont les axes de coordonnées et je me sers de cette forme pour étudier l'itération d'un point pris dans le domaine du point double. Je m'occupe ensuite de l'itération d'une courbe et de l'étude des courbes invariantes, analytiques ou non; enfin je généralise pour les substitutions à deux variables la notion de point limite à convergence irrégulière introduite par M.^r Kœnigs dans l'étude des substitutions à une variable.

Dans le *Chap. II*, je traite les mêmes questions pour les transformations à trois variables, en étudiant successivement les courbes et les surfaces analytiques invariantes, les formes réduites de la substitution, l'itération d'un point.

Dans le *Chap. III*, je montre comment les surfaces et les courbes invariantes peuvent être définies, dans certains cas, sous forme implicite, par l'équation de SCHRÖDER et je me sers des résultats connus relatifs à cette équation pour donner, dans ces cas, des équations générales permettant de représenter toute courbe, *analytique* ou *non*, invariante par la substitution, dans le domaine du point double; enfin, je m'occupe des analogies entre la théorie de l'itération et la théorie des points singuliers des équations différentielles.

Dans le *Chap. IV*, je m'occupe des substitutions $(X, Y; x, y, y')$. Après avoir défini les éléments doubles, les antécédentes successives d'une courbe

contenant un élément double, je démontre un théorème général d'existence sur les courbes invariantes par la substitution. Enfin je cherche les invariants différentiels du premier ordre de la substitution pour le groupe ponctuel.

Le *Chap. V* est la généralisation du précédent; j'étudie des substitutions $(X, Y_1, Y_2, \dots Y_n; x, y_1, y_2, \dots y_n; y'_1, y'_2, \dots y'_n)$ contenant à la fois plusieurs fonctions et leurs dérivées par rapport à x , ce qui conduit à un système d'équations fonctionnelles.

Le *Chap. VI* est consacré aux transformations de contact: j'applique à la recherche des courbes invariantes par une transformations de contact les résultats établis précédemment, soit dans le *Chap. II*, soit dans le *Chap. IV*. Je montre aussi comment les résultats relatifs aux surfaces invariantes par une transformation à trois variables pourraient s'appliquer de même à la recherche des équations différentielles du premier ordre invariantes par une transformation de contact, mais je me borne à poser ce dernier problème.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les Séances du 30 novembre 1903 et du 2 janvier 1905.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I.

L'ITÉRATION A DEUX VARIABLES.

1. *Courbes invariantes.* — Etant donnée une substitution à deux variables :

$$X = f(x, y) \quad Y = \varphi(x, y) \quad (1)$$

nous nous proposons de déterminer les courbes invariantes par cette substitution.

Une courbe invariante peut être définie de la façon suivante: soit P_0 un point quelconque, $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ ses conséquents et $P_{-1}, P_{-2}, \dots, P_{-n}, \dots$ ses antécédents. Joignons $P_0 P_1$ par un arc de courbe arbitraire: à cet arc la substitution fera correspondre un arc $P_1 P_2$, à ce dernier un arc $P_2 P_3$, etc.... et de même la substitution inverse fera correspondre successivement à l'arc $P_0 P_1$ les arcs $P_{-1} P_{-2}, P_{-2} P_{-3}, \dots$. L'ensemble de tous ces arcs constitue une courbe invariante par la substitution.

Supposons que la suite des points $P_0, P_1, \dots$ admette un point limite: si l'on suppose les fonctions f et φ continues en ce point, ce point est un point double de la substitution.

Nous supposerons pour l'instant les fonctions f et φ holomorphes dans le domaine du point double. Une courbe passant par ce point sera dite *analytique*, si l'une au moins des coordonnées x, y s'exprime par une fonction holomorphe de l'autre dans le domaine du point double.

Nous nous bornerons d'abord à chercher *les courbes invariantes passant par un point double et analytiques dans le domaine de ce point double*: mais nous étudierons plus loin (§ 14) le cas non analytique et nous obtiendrons aussi une équation générale commune à toutes les courbes invariantes, analytiques ou non (§ 27).

2. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point double de la substitution (1). Considérons l'équation en S :

$$\begin{vmatrix} f'_{x_0} - S & f'_{y_0} \\ \varphi'_{x_0} & \varphi'_{y_0} - S \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Dans son célèbre mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles M.^r POINCARÉ a été conduit à chercher les courbes invariantes par la substitution (1), dans le cas où les racines de l'équation en S sont positives et l'une supérieure, l'autre inférieure à 1 (*): M.^r POINCARÉ démontre alors, par la méthode des fonctions majorantes, l'existence de deux courbes analytiques invariantes passant par le point double et définies dans le domaine de ce point. Nous allons montrer que ce résultat subsiste, du moins en général, si on ne fait plus l'hypothèse que les racines sont positives, l'une inférieure et l'autre supérieure à l'unité: nous modifierons pour cela la démonstration de M.^r POINCARÉ, de façon à l'étendre à ces nouveaux cas.

3. Supposons les racines S, S' de l'équation (2) distinctes et non nulles: on sait, par la théorie des substitutions linéaires, qu'on peut alors, en effectuant sur x, y d'une part et sur X, Y d'autre part, une même substitution linéaire, ramener la substitution (1) à la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} X &= Sx + f(x, y) \\ Y &= S'y + \varphi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ seront des séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de x et de y , commençant par des termes du second degré et convergentes pour les valeurs de x et de y de module suffisamment petit.

On voit immédiatement qu'une courbe analytique invariante passant par l'origine a nécessairement pour tangente en ce point l'une des droites $0x$ ou $0y$.

Cherchons d'abord une courbe invariante tangente à $0x$ et soit:

$$y = \psi(x) = \frac{\psi''_0}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\psi'''_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

son équation. La fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\psi \left[Sx + f(x, \psi(x)) \right] = S' \psi(x) + \varphi(x, \psi(x)). \quad (4)$$

(*) *Journal de Liouville*, 1886, page 193.

En prenant les dérivées successives des deux membres et en y remplaçant x par zéro, on obtiendra des égalités permettant de calculer les coefficients de la série $\psi(x)$ et il restera à établir la convergence de cette série : d'après la façon même dont elle aura été obtenue, cette série sera solution de l'équation fonctionnelle. En désignant pour abréger $\psi(x)$ par y , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \psi' \left[Sx + f(x, y) \right] &= \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right] = S' y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' \\ \psi'' \left[Sx + f(x, y) \right] &= \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^2 + \\ &+ \psi' (Sx + \dots) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \right] = S' y'' + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

les termes non écrits s'annulant pour $x = 0$.

En remplaçant x par zéro, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \psi'_0 &= 0 \quad \psi''_0 (S' - S^2) = - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 \\ \psi'''_0 (S' - S^3) &= 3 S \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 \psi''_0 - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_0 - 3 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 \psi''_0. \end{aligned}$$

En général, si on suppose les coefficients $\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0$ calculés, on pourra calculer le suivant, pourvu que $S' - S^n$ ne soit pas nul: nous supposons que $S' - S^n$ n'est nul pour aucune valeur de l'entier n . Le calcul formel des coefficients est alors possible.

Dans le cas où $S' - S^n$ est nul, l'équation qui fournit $\psi^{(n)}_0$ est en général impossible de sorte que l'équation fonctionnelle n'a pas en général de solution holomorphe. Par exception, le second membre de l'équation pourrait être nul, il y aurait alors une infinité de solutions, au point de vue formel du moins, car il resterait à étudier la série au point de vue de la convergence, comme nous allons le faire dans le cas général: mais je ne traiterai que ce dernier cas.

On verra plus loin (§ 14 bis) comment le cas où $S' - S^n$ est nul peut se ramener au cas des racines égales: $S' = S$.

4. Avant de nous occuper de la convergence de la série, il est nécessaire d'étudier de plus près la façon dont figurent $\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0$ dans l'équation qui fournit $\psi^{(n)}_0$.

Considérons $\psi'_0, \psi''_0, \dots, \psi^{(p)}_0$ comme étant respectivement de poids 0, 1, 2, ..., $p - 1$; appelons poids d'un monôme par rapport à ces mêmes quantités la somme des produits de chacune d'elles par son exposant, poids d'un polynôme le poids des termes de ce polynôme qui ont le poids le plus grand.

Nous allons montrer que $\psi^{(n)}_0$ est un polynôme de poids $n - 2$ par rapport aux dérivées $\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0$ d'ordre inférieur à n .

Reprenons l'équation (4) que nous écrirons sous la forme :

$$\psi(v) = S' \psi(x) + \varphi(x, y)$$

en posant :

$$y = \psi(x) \quad v = Sx + f(x, y).$$

Si on dérive n fois cette équation, on obtient une équation de la forme :

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(n)}(v) \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^n - S' \psi^{(n)}(x) = \\ = \varpi_n \left(\psi'(x), \psi''(x), \dots, \psi^{(n-1)}(x); \psi'(v), \psi''(v), \dots, \psi^{(n-1)}(v) \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ϖ_n étant un polynôme dont les coefficients dépendent de S et des dérivées des fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$; ce polynôme est linéaire par rapport à $\psi'(v), \psi''(v), \dots, \psi^{(n-1)}(v)$, mais non linéaire par rapport à $\psi'(x), \psi''(x), \dots, \psi^{(n-1)}(x)$.

Pour $x = 0$, $\psi^{(k)}(v)$ et $\psi^{(k)}(x)$ deviennent tous deux égaux à $\psi^{(k)}_0$: nous sommes donc conduits pour établir la proposition énoncée à considérer $\psi^{(k)}(v)$ et $\psi^{(k)}(x)$ comme étant l'un et l'autre de poids $k - 1$. Nous allons démontrer que le polynôme ϖ_n est alors de poids $n - 1$ et que pour $x = 0$, les termes de poids $n - 1$ s'annulent de sorte que $\psi^{(n)}_0$ sera bien un polynôme de poids $n - 2$ par rapport aux dérivées d'ordre inférieur à n .

Les calculs effectués au § 3 montrent que la loi ainsi énoncée est vérifiée pour les premières valeurs de l'indice n . Montrons donc que si ϖ_n est de poids $n - 1$, ϖ_{n+1} sera de poids n . En dérivant l'équation (5) par rapport à x , on obtient :

$$\begin{aligned} & \psi^{(n+1)}(v) \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^{n+1} + \\ & + n \psi^{(n)}(v) \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right] \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' \right] - \\ & - S' \psi^{(n+1)}(x) = \frac{d \varpi_n}{d x} \end{aligned}$$

$\frac{d\varpi_n}{dx}$ étant la dérivée totale du polynôme ϖ_n par rapport à x . On en conclut la relation de récurrence:

$$\varpi_{n+1}(x) = \frac{d\varpi_n}{dx} - n\psi^{(n)}(v) \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^{n-1} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y} y'' \right]$$

et il faut vérifier que le poids de ϖ_{n+1} est égal à n . Il suffit de l'établir pour le terme $\frac{d\varpi_n}{dx}$, car c'est évident pour le second terme. Or $\varpi_n(x)$ est une somme de termes de la forme:

$$A(x, y) \psi^{(v)}(v) y'^{\alpha_1} y''^{\alpha_2} \dots y_p^{\alpha_p}$$

en posant pour abréger $y_p = \psi^{(v)}(x)$. Par dérivation, ce terme donne plusieurs autres termes obtenus en remplaçant chacun des facteurs par sa dérivée: le terme obtenu en remplaçant $A(x, y)$ par $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} y'$ a la même poids que celui dont il provient; en remplaçant $\psi^{(v)}(v)$ par sa dérivée par rapport à x le poids augmente de 1 unité; enfin si on remplace $y_k^{\alpha_k}$ par sa dérivée $\alpha_k y_k^{\alpha_k-1} y_{k+1}$, le poids diminue de $(k-1)\alpha_k$ et augmente de $(k-1)(\alpha_k-1) + k$ de sorte qu'en définitive il augmente aussi de 1 unité. Le poids de $\frac{\partial \varpi_n}{dx}$ est donc supérieur d'une unité au poids de ϖ_n , ce qui montre que ϖ_{n+1} est bien de poids n .

Il reste à voir que pour $x=0$ les termes de poids $n-1$ s'annulent, de sorte que $\psi_0^{(n)}$ sera un polynôme de poids $n-2$. Cette circonstance provient de ce que dans chacun des polynômes ϖ les termes de poids le plus élevé contiennent en facteur $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui s'annule pour $x=0$. On le constate immédiatement pour ϖ_2 et il suffira de le démontrer pour ϖ_{n+1} , en supposant que cela ait été démontré pour ϖ_n . Supposons donc que, dans ϖ_n , les termes de plus haut poids soient de la forme $\frac{\partial f}{\partial y} \varrho_n$, en désignant par ϱ_n un polynôme dépendant des mêmes variables que ϖ_n . La relation de récurrence établie plus haut montre que, dans ϖ_{n+1} , les termes de plus haut poids provien-

dront du polynôme:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\rho_n}{dx} - n \psi^{(n)}(v) \left[S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y} y''$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bien en facteur dans ces termes.

La proposition énoncée au début de ce paragraphe est donc établie.

5. Occupons-nous maintenant de la convergence de la série $\psi(x)$.

On peut toujours supposer $|S| < 1$: dans le cas contraire, on remplacerait la substitution (5) par son inverse et on chercherait une courbe invariante par cette substitution inverse: cette courbe serait aussi invariante par la substitution directe. Le seul cas que nous laisserons ainsi de côté sera le cas où $|S|$ serait égal à 1.

Considérons la substitution auxiliaire:

$$\begin{aligned} X &= S_1 x + F(x, y) \\ Y &= S_1 y - F(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

où S_1 désigne un nombre compris entre $|S|$ et 1 et $F(x, y)$ la fonction suivante:

$$F(x, y) = \frac{M\beta^2(x+y)^2}{1-\beta(x+y)}.$$

On sait que, M et β étant deux nombres positifs convenablement choisis, cette fonction est une fonction majorante pour les fonctions $f(x, y)$ et $-\varphi(x, y)$.

Des hypothèses faites sur S , S' et S_1 , il résulte que $\frac{|S' - S''|}{|S_1 - S_1^n|}$ est supérieur, quel que soit n , à un certain nombre positif λ qu'on peut toujours supposer inférieur à 1 (*). On a donc, quel que soit n :

$$|S' - S^n| > \lambda (S_1 - S_1^n).$$

Soit $\theta(x)$ la série analogue à $\psi(x)$ lorsqu'on remplace la substitution (3) par la substitution (6). Les coefficients de $\theta(x)$ seront tous positifs, comme le montre le calcul des coefficients fait au § 3. Comparons alors $|\psi''_0|$,

(*) Dans le cas envisagé par M.^r POINCARÉ ($S' > 1 > S$), on peut prendre $\lambda = 1$: la démonstration est alors exactement la même que celle de M.^r POINCARÉ.

$|\psi''_0|, \dots$ à $\theta''_0, \theta'''_0, \dots$ (*). On a :

$$|\psi''_0| = \left| \frac{-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0}{S' - S^2} \right| < \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}{\lambda (S_1 - S_1^2)}$$

ou bien :

$$|\psi''_0| < \frac{1}{\lambda} \theta''_0.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} |\psi'''_0| &= \left| \frac{3 S \psi''_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0 - 3 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 \psi''_0}{S' - S^3} \right| < \\ &< \frac{3 S_1 \frac{1}{\lambda} \theta''_0 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_0 + 3 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \frac{1}{\lambda} \theta''_0}{\lambda (S_1 - S_1^3)} \end{aligned}$$

et, à fortiori, puisque $\frac{1}{\lambda}$ est supérieur à 1 :

$$|\psi'''_0| < \frac{\frac{1}{\lambda} \left[3 S_1 \theta''_0 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_0 + 3 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \theta''_0 \right]}{\lambda (S_1 - S_1^3)}$$

ou bien :

$$|\psi'''_0| < \frac{1}{\lambda^2} \theta'''_0.$$

Je dis qu'on a en général :

$$|\psi^{(n)}_0| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \theta^{(n)}_0.$$

En effet, supposons cette inégalité vérifiée pour $\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0$ et montrons qu'elle subsiste pour $\psi^{(n)}_0$.

Il résulte du § 4 que l'on a :

$$\psi^{(n)}_0 = \frac{\varpi_1(\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0)}{S' - S^n}$$

ϖ_1 étant un polynôme de poids $n-2$ par rapport à $\psi''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0$ dont les

(*) Je me suis inspiré, pour cette comparaison, d'une remarque de M.^r LEAU (*Étude sur les équations fonctionnelles*. Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, 1897. Chap. I, § 13).

coefficients sont eux-mêmes des polynômes par rapport à S et aux dérivées partielles de f et de φ .

Supposons qu'on remplace dans $\mathfrak{w}_1$ les divers termes par leurs valeurs absolues, $|S|$ par S_1 qui lui est supérieur, les modules des dérivées partielles de f et de φ par les dérivées partielles de F qui leur sont supérieures et enfin $|\psi_0^{(k)}|$ par $\frac{1}{\lambda^{k-1}} \theta_0^{(k)}$ qui lui est supérieur. La plus haute puissance de $\frac{1}{\lambda}$ qui figure alors dans les divers termes de $\mathfrak{w}_1$ est $\frac{1}{\lambda^{n-2}}$, puisque $\mathfrak{w}_1$ est de poids $n-2$, lorsqu'on attribue à $\psi_0^{(k)}$ le poids $k-1$. Si on remplace toutes les puissances de $\frac{1}{\lambda}$ par $\frac{1}{\lambda^{n-2}}$, on augmente les divers termes. Le numérateur de $\psi_0^{(n)}$ est ainsi remplacé par le produit de $\frac{1}{\lambda^{n-2}}$ par le numérateur de $\theta_0^{(n)}$. D'autre part le dénominateur de $\psi_0^{(n)}$ est supérieur à $\lambda(S_1 - S_1^n)$. On a donc :

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{\frac{1}{\lambda^{n-2}} \theta_0^{(n)} (S_1 - S_1^n)}{\lambda (S_1 - S_1^n)}$$

ou bien :

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \theta_0^{(n)}.$$

Si nous démontrons la convergence de la série $\theta(x)$ dans un cercle de rayon ρ , il résultera de cette inégalité la convergence de la série $\psi(x)$ dans un cercle de rayon $\lambda\rho$ et on aura ainsi prouvé l'existence d'une courbe :

$$y = \frac{\psi_0''}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\psi_0'''}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

définie pour $|x| < \lambda\rho$, invariante par la substitution donnée et tangente à Ox .

Pour démontrer que la série $\theta(x)$ est convergente, il suffit de prouver directement qu'il existe une courbe analytique tangente à Ox et invariante par la substitution (6). La démonstration s'achève comme dans le cas envisagé par M.^r POINCARÉ (*).

Posons $x + y = z$ et de même $X + Y = Z$. La substitution (6) devient :

$$\begin{aligned} Z &= S_1 z \\ X &= S_1 x + \frac{M \beta^2 z^2}{1 - \beta z}. \end{aligned}$$

(*) POINCARÉ, loc. cit., page 195.

Cherchons une fonction x de z de la forme:

$$x = \Phi(z) = z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots$$

invariante par cette substitution. On doit avoir:

$$\Phi(S_1 z) = S_1 \Phi(z) + \frac{M \beta^2 z^2}{1 - \beta z}$$

ou:

$$S_1 z + \alpha_2 S_1^2 z^2 + \alpha_3 S_1^3 z^3 + \dots = S_1 z + \\ + (\alpha_2 S_1 + M \beta^2) z^2 + (\alpha_3 S_1 + M \beta^3) z^3 + \dots$$

d'où l'on déduit $\alpha_2, \alpha_3, \dots$:

$$\alpha_n = -\frac{M \beta^n}{S_1 - S_1^n}$$

et:

$$x = \Phi(z) = z - \frac{M \beta^2}{S_1 - S_1^2} z^2 - \frac{M \beta^3}{S_1 - S_1^3} z^3 - \dots - \frac{M \beta^n}{S_1 - S_1^n} z^n - \dots$$

La série du second membre est convergente pour $|z| < \frac{1}{\beta}$ et par suite y est défini par l'équation:

$$x = x + y - \frac{M \beta^2}{S_1 - S_1^2} (x + y)^2 - \frac{M \beta^3}{S_1 - S_1^3} (x + y)^3 - \dots$$

ou:

$$y = \frac{M \beta^2}{S_1 - S_1^2} (x + y)^2 + \frac{M \beta^3}{S_1 - S_1^3} (x + y)^3 + \dots$$

La fonction implicite y définie par cette équation est la série $\theta(x)$ cherchée.

On démontre de même l'existence d'une courbe:

$$x = \frac{\psi''_0}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{\psi'''_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \dots$$

tangente à $0y$ et invariante par la substitution (3), en supposant que l'on a quel que soit n : $S - S^n = 0$ et $|S'| = 1$.

La méthode que nous venons d'employer montre que les deux courbes ainsi obtenues sont les seules courbes analytiques invariantes passant par le point double.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Etant donnée la substitution (1), si les racines de l'équation en S relative à un point double sont distinctes, de module différent de 0 et de 1 et si aucune des racines n'est une puissance entière de l'autre racine, il existe deux courbes analytiques invariantes C et C' et deux seulement passant par le point double et définies dans le domaine de ce point.*

6. *Courbe de points doubles.* Les coordonnées des points doubles de la substitution (1) sont données par les équations:

$$\begin{aligned} x &= f(x, y) \\ y &= \varphi(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

En général les points doubles sont donc des points isolés.

Il peut arriver cependant que les équations (7) soient satisfaites par les coordonnées d'une infinité de points formant une courbe: il y a alors une *courbe de points doubles* C .

En tout point de la courbe C , l'équation en S a une racine égale à 1: en un pareil point, le déterminant fonctionnel $\frac{D(f-x, \varphi-y)}{D(x, y)}$ est en effet nul et on a par suite:

$$\begin{vmatrix} f'_x - 1 & f'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation en S a donc une racine S' égale à 1 et une racine S qui est en général différente de 1.

Une première courbe invariante passant par un point O de la courbe C est la courbe C elle-même. Il y aura en général une deuxième courbe invariante passant par O : en effet, d'après la démonstration du théorème précédent l'existence d'une pareille courbe sera assurée si S a un module différent de 1, car alors $1 - S^n$ n'est nul pour aucune valeur entière de n .

Ainsi, par tout point de la courbe des points doubles C pour lequel $|S|$ est différent de 1, passe une courbe analytique invariante par la substitution et distincte de la courbe C .

7. *Forme canonique de la substitution à deux variables.* — La connaissance des courbes invariantes par une substitution permet de ramener, par un changement de variables, la substitution à une forme remarquable, dans le domaine d'un point double.

Supposons que le point double soit un point double isolé et prenons ce point pour origine : choisissons de plus les axes $0x, 0y$ de façon qu'ils ne soient pas tangents aux deux courbes invariantes et soient :

$$y = \lambda x + \alpha x^2 + \dots$$

$$y = \lambda' x + \alpha' x^2 + \dots$$

les équations de ces deux courbes.

Nous pourrions, par une même transformation ponctuelle effectuée sur x, y d'une part et sur X, Y d'autre part, supposer que les deux courbes invariantes sont les axes $0x, 0y$. Posons en effet :

$$\begin{aligned} u &= y - \lambda x - \alpha x^2 - \dots \\ v &= y - \lambda' x - \alpha' x^2 - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

et pareillement :

$$\begin{aligned} U &= Y - \lambda X - \alpha X^2 - \dots \\ V &= Y - \lambda' X - \alpha' X^2 - \dots \end{aligned}$$

Les équations (8) peuvent être résolues par rapport à x, y puisque $\lambda - \lambda'$ n'est pas nul et la substitution prend la forme :

$$U = f_1(u, v)$$

$$V = \varphi_1(u, v).$$

Les courbes invariantes sont devenues $u = 0, v = 0$; $f_1(0, v)$ doit être nul quel que soit v : U est par suite de la forme $u f_2(u, v)$, f_2 étant une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine; de même V est de la forme $v \varphi_2(u, v)$, la fonction φ_2 étant holomorphe.

Dans le domaine de l'origine la substitution (1) se ramène donc à la forme :

$$X = x f(x, y)$$

$$Y = y \varphi(x, y).$$

Il est facile de voir que les termes indépendants dans les fonctions f et φ sont les racines S, S' de l'équation en S : cela résulte de ce que ces racines sont des invariants de la substitution (1) pour toute transformation ponctuelle régulière à l'origine.

Ainsi, la substitution (1), lorsqu'on fait sur S et S' les hypothèses du § 5, se ramène à la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} X &= x [S + F(x, y)] \\ Y &= y [S' + \Phi(x, y)] \end{aligned} \quad (9)$$

$F(x, y)$ et $\Phi(x, y)$ désignant des fonctions de x et de y nulles pour $x = y = 0$ et holomorphes dans le domaine de l'origine.

8. *Itération d'un point.* — Supposons maintenant les variables réelles et, étant donné un point x, y dans le domaine d'un point double isolé de la substitution, proposons-nous d'étudier la disposition des conséquents et des antécédents successifs de ce point.

Supposons d'abord les racines S, S' de l'équation en S réelles et distinctes et distinguons trois cas :

PREMIER CAS : $|S'| < |S| < 1$. — Soient $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n; \dots$ les conséquents successifs du point x, y . Supposons la substitution ramenée à la forme canonique (9) : pour les valeurs de x et de y inférieures en valeur absolue à un certain nombre positif ε , les fonctions $S + F(x, y)$ et $S' + \Phi(x, y)$ ont un module maximum M inférieur à 1. Or on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n [S + F(x_n, y_n)] \\ y_{n+1} &= y_n [S' + \Phi(x_n, y_n)] \end{aligned}$$

et, par suite :

$$|x_{n+1}| < M |x_n| \quad \text{et} \quad |y_{n+1}| < M |y_n|.$$

Done, si le point x, y est intérieur au domaine : $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$, ses conséquents sont tous intérieurs au même domaine et l'on a :

$$|x_n| < M^n |x| \quad \text{et} \quad |y_n| < M^n |y|$$

de sorte que x_n et y_n tendent vers zéro.

Cherchons si les conséquents successifs tendent vers le point double dans une direction déterminée. On a :

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} \left[\frac{S'}{S} + \theta(x_n, y_n) \right]$$

θ étant une fonction holomorphe de x et de y s'annulant pour $x = y = 0$.

Soit k un nombre compris entre $\left| \frac{S'}{S} \right|$ et 1. On aura, à partir d'un certain

rang :

$$\left| \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \right| < k \left| \frac{y_n}{x_n} \right|.$$

Donc $\frac{y_n}{x_n}$ tend vers zéro. Il y a exception si le point initial est sur Oy : ses conséquents restent sur Oy .

Revenons maintenant à la substitution sous sa forme primitive (1). On pourra énoncer les résultats suivants :

Etant donné un point double de la substitution pour lequel les racines de l'équation en S sont réelles, distinctes, et ont des modules différents inférieurs à 1 (), il existe un domaine entourant le point double et possédant les propriétés suivantes :*

1.° *Les conséquents successifs d'un point pris dans le domaine tendent vers le point double.*

2.° *Les conséquents successifs tendent vers le point double tangentielle-ment à l'une des courbes invariantes C , sauf si, le point initial étant pris sur l'autre courbe C' , ses conséquents restent sur C' .*

Le premier de ces résultats n'est pas modifié si les racines, toujours supposées distinctes, ont le même module : $S' = -S$. Mais le deuxième résultat ne subsiste pas.

DEUXIÈME CAS : $|S'| > |S| > 1$. La substitution inverse est de la forme :

$$x = X \left(\frac{1}{S} + \dots \right)$$

$$y = Y \left(\frac{1}{S'} + \dots \right)$$

et on a :

$$\left| \frac{1}{S} \right| < \left| \frac{1}{S'} \right| < 1.$$

On est donc ramené au cas précédent :

Les antécédents successifs d'un point pris dans le domaine du point double tendent vers ce point tangentielle-ment à l'une des courbes invariantes, sauf si le point initial est pris sur l'autre courbe invariante.

(*) On suppose, bien entendu, qu'on est dans les conditions du théorème du § 5, c'est-à-dire qu'on n'a pas $S = S'^n$ ni $S' = S^n$.

TROISIÈME CAS: $|S'| < 1 < |S|$. Pour les valeurs de x et de y inférieures en valeur absolue à un certain nombre positif ε , la fonction $S' + \Phi(x, y)$ a un module inférieur à un nombre positif fixe M plus petit que 1 et la fonction $S + F(x, y)$ a un module supérieur à un nombre fixe m plus grand que 1. En partant d'un point x, y intérieur au domaine $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$, on obtient des conséquents $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ qui, jusqu'à un certain rang p , sont intérieurs au domaine et on a :

$$\begin{aligned} |x_1| &> m|x|; |x_2| > m^2|x|; \dots |x_p| > m^p|x| \\ |y_1| &< M|y|; |y_2| < M^2|y|; \dots |y_p| < M^p|y|. \end{aligned}$$

Les p premiers conséquents se rapprochent donc de Ox et s'éloignent de Oy ; après quoi les conséquents sortent du domaine et nous ne pouvons plus rien en dire. On peut d'ailleurs choisir x et y suffisamment petits pour que p soit aussi grand qu'on le veut.

De même la substitution inverse montre que les antécédents jusqu'à un certain rang q se rapprochent de Oy et s'éloignent de Ox , après quoi ils sortent du domaine. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Etant donné un point double de la substitution, pour lequel les racines de l'équation en S sont réelles, distinctes, l'une inférieure et l'autre supérieure à 1 en valeur absolue, il existe un domaine entourant le point double et tel que les conséquents successifs d'un point du domaine jusqu'à un certain rang p se rapprochent de l'une des courbes invariantes C et s'éloignent de l'autre C' , tandis que les antécédents jusqu'à un certain rang q se rapprochent de C' et s'éloignent de C , après quoi les antécédents et les conséquents sortent du domaine. Si le point initial est suffisamment voisin du point double, les nombres p et q sont aussi grands qu'on le veut. Il y a exception si le point initial est pris sur les courbes C ou C' .

9. Supposons maintenant les racines S et S' imaginaires conjuguées. L'existence des courbes invariantes C et C' est assurée, si $|S|$ n'est pas égal à 1. Soient :

$$\begin{aligned} y &= \lambda x + \alpha x^2 + \dots \\ y &= \lambda' x + \alpha' x^2 + \dots \end{aligned}$$

les équations des deux courbes invariantes: $\lambda, \alpha, \dots$ et $\lambda', \alpha', \dots$ sont des imaginaires respectivement conjugués. Posons :

$$\begin{aligned} u + iv &= y = \lambda x + \alpha x^2 + \dots \\ u - iv &= y = \lambda' x + \alpha' x^2 + \dots \end{aligned}$$

et pareillement :

$$U + i V = Y - \lambda X - \alpha \lambda^2 - \dots$$

$$U - i V = Y - \lambda' X - \alpha' X^2 - \dots$$

Par ce changement de variables, la substitution se ramènera comme précédemment (§ 7) à la forme :

$$U + i V = (u + i v) (H + i K)$$

$$U - i V = (u - i v) (H - i K)$$

H et K étant deux fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine. En appelant encore les variables x, y, X, Y et en posant :

$$S = \rho e^{i\alpha}, S' = \rho e^{-i\alpha}$$

les équations de la substitution s'écrivent :

$$X + i Y = (x + i y) [\rho e^{i\alpha} + F(x, y) + i \Phi(x, y)]$$

$$X - i Y = (x - i y) [\rho e^{-i\alpha} + F(x, y) - i \Phi(x, y)]$$

F et Φ étant des fonctions holomorphes qui s'annulent pour $x = 0, y = 0$. On en déduit :

$$X^2 + Y^2 = (x^2 + y^2) [\rho^2 + \Theta(x, y)]$$

Θ étant aussi une fonction holomorphe nulle à l'origine.

10. Nous distinguerons deux cas :

PREMIER CAS : $|S| = |S'| < 1$ c'est-à-dire $\rho < 1$. — Pour les valeurs de x et de y inférieures en valeur absolue à un certain nombre positif ε , la fonction $\rho^2 + \Theta(x, y)$ a un module maximum inférieur à 1. On a donc :

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 < M(x_n^2 + y_n^2)$$

d'où l'on déduit :

$$x_n^2 + y_n^2 < M^n(x^2 + y^2).$$

Donc $x_n^2 + y_n^2$ tend vers zéro et les conséquents d'un point situé dans le domaine : $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$ sont intérieurs au domaine et tendent vers l'origine. D'autre part, on a :

$$\arg. (X + i Y) = \arg. (x + i y) + \arg. [S + F(x, y) + i \Phi(x, y)].$$

En appelant ω_n l'angle de la droite joignant l'origine au point x_n, y_n avec l'axe Ox , on a :

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \alpha + \varepsilon_n.$$

ε_n tendant vers zéro avec x_n et y_n .

Par suite $\omega_{n+1} - \omega_n$ a pour limite α . Il en résulte que les conséquents successifs tournent asymptotiquement autour de l'origine O à la façon de points distribués sur une spirale logarithmique et que les rayons joignant l'origine aux conséquents successifs tendent à former un angle constant chacun avec le suivant. Cette dernière circonstance provient évidemment de la forme canonique donnée à la substitution, les courbes invariantes étant les droites isotropes. Mais si on revient aux variables primitives, on peut énoncer les résultats suivants :

Etant donné un point double de la substitution, pour lequel les racines de l'équation en S sont imaginaires conjuguées et de module inférieur à 1, il existe un domaine entourant le point double et possédant les propriétés suivantes :

1.^o *Les conséquents successifs d'un point pris dans le domaine tendent vers le point double.*

2.^o *Les rayons vecteurs joignant l'origine aux conséquents successifs tournent indéfiniment autour de l'origine en se rapprochant aussi peu qu'on le veut des rayons homologues successifs de deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles imaginaires les tangentes aux deux courbes invariantes.*

DEUXIÈME CAS $|S| = |S'| > 1$. En remplaçant la substitution donnée par son inverse, on voit qu'on peut énoncer pour les antécédents successifs des résultats pareils à ceux trouvés dans le cas précédent pour les conséquents.

Les antécédents successifs tendent vers le point double et les rayons vecteurs qui joignent l'origine à ces antécédents tournent indéfiniment autour de l'origine.

11. Etudions enfin l'itération d'un point dans le cas où la substitution a une courbe de points doubles.

Supposons que, par une transformation ponctuelle, on ait amené cette courbe à être Oy . En tout point de Oy , d'ordonnée y_0 , l'équation en S a deux racines dont l'une est égale à 1, tandis que l'autre S est une fonction de y_0 en général différente de 1. Considérons un segment AB de Oy , $y_1 < y_0 < y_2$, en chaque point duquel on ait $|S| < 1$ et supposons les fonc-

tions qui définissent la substitution analytique dans un certain domaine: — $h < x < h$, $y_1 < y < y_2$ entourant ce segment. Par le point d'ordonnée y_0 passe une courbe invariante autre que Oy et non tangente à Oy : soit

$$y = y_0 + \alpha x + \beta x^2 + \dots$$

son équation. La série du second membre a pour rayon de convergence $\lambda \rho$, d'après les notations du § 5. Nous voulons montrer qu'on peut supposer ce rayon *indépendant de y_0* pour tous les points du segment AB . En effet ρ désigne le rayon de convergence de la série majorante du § 5: cette série dépend de trois constantes M , β , S_1 , cette dernière assujettie à être comprise entre $|S|$ et 1. Il est évident qu'on peut prendre pour M et β les limites supérieures de l'ensemble des valeurs prises par ces quantités pour les différents points du segment AB et pour S_1 le maximum des valeurs prises par $|S|$: S_1 sera évidemment inférieur à 1. La série est alors indépendante de y_0 et il en est de même de ρ . Quant à λ , il désigne une limite inférieure de la quantité $\frac{(1 - S^n)}{S_1 - S_1^n}$ pour l'ensemble des valeurs de n : on voit qu'on peut prendre $\lambda = \frac{1 - S_1}{S_1}$, quantité indépendante de y_0 .

On peut donc définir un domaine — $h < x < h$ tel que par tout point de Oy ayant une ordonnée comprise entre y_1 et y_2 passe une courbe invariante définie dans l'intervalle — $h < x < h$. Si h est assez petit, l'ensemble de ces courbes constitue un domaine tel que par tout point de ce domaine passe une courbe invariante et une seule.

Soit alors x, y un point pris dans ce domaine et O' le point où la courbe invariante qui y passe coupe Oy ; en prenant ce point pour origine, la substitution peut être ramenée à la forme suivante:

$$X = x [S + f(x, y)]$$

$$Y = y [1 + x \varphi(x, y)]$$

f et φ désignant des fonctions holomorphes pour $x = y = 0$. En désignant par M le maximum de $S + f(x, y)$, qui est inférieur à 1 si h est suffisamment petit, on a:

$$x_{n+1} < M^n x$$

et par suite les conséquents du point x, y appartiennent au domaine et tendent vers O' en restant sur la courbe invariante qui passe par ce point x, y .

On obtient des conclusions analogues pour les antécédents, si on considère un segment de Oy pour lequel on ait: $|S| > 1$.

Revenant à la courbe des points doubles, on peut énoncer les résultats suivants:

Soit AB un arc de la courbe des points doubles le long duquel $|S|$ est constamment inférieur à 1: on peut limiter de part et d'autre de l'arc AB un domaine tel que les conséquents d'un point de ce domaine restent dans le domaine et tendent vers un point de la courbe des points doubles, en restant sur une même courbe analytique invariante.

Les antécédents d'un point pris dans le voisinage d'un arc AB pour lequel $|S|$ est constamment supérieur à 1 possèdent des propriétés analogues.

12. *Itération d'une courbe.* — Si, dans la substitution (1), on suppose que y soit une fonction de x : $y = \psi_0(x)$, Y devient une fonction de X , soit $Y = \psi_1(X)$ et la fonction $\psi_1(x)$ est dite la *conséquente* de $\psi_0(x)$: réciproquement, si on pose $Y = \psi_0(X)$, on a pour y une fonction $\psi_{-1}(x)$ qui est dite l'*antécédente* de $\psi_0(x)$. A une fonction continue $\psi_0(x)$, la substitution fait ainsi correspondre une suite indéfinie de conséquentes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ et d'antécédentes $\psi_{-1}, \psi_{-2}, \dots, \psi_{-n}$ qui sont des fonctions continues. En général ces conséquentes ou ces antécédentes sont définies dans des intervalles distincts. Supposons cependant qu'on ait pu définir un intervalle d'existence commun à toutes les conséquentes ou à toutes les antécédentes. On peut alors établir le théorème suivant:

THÉOREME. — *Etant donnée la substitution (1), si les conséquentes ou les antécédentes successives $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ ou $\psi_{-1}(x), \psi_{-2}(x), \dots, \psi_{-n}(x)$ d'une fonction continue $\psi_0(x)$ sont définies dans un intervalle commun, si dans cet intervalle elles ont une limite $\psi(x)$ pour n infini et que $\psi_n(x)$ tende uniformément vers sa limite dans l'intervalle considéré, cette limite $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:*

$$\psi[f(x, \psi(x))] = \varphi(x, \psi(x)).$$

Démontrons le théorème pour les conséquentes par exemple. On a entre $\psi_n(x)$ et $\psi_{n+1}(x)$ les deux relations:

$$X = f[x, \psi_n(x)]$$

$$\psi_{n+1}(X) = \varphi[x, \psi_n(x)]$$

d'où l'on déduit:

$$\psi_{n+1}[f(x, \psi_n(x))] = \varphi(x, \psi_n(x)). \quad (10)$$

Nous supposons que la fonction $\psi_n(x)$ ait pu être définie, quel que soit n , dans un certain intervalle I où elle est continue et qu'elle ait une limite $\psi(x)$ vers laquelle elle tend *uniformément* dans cet intervalle: cette limite $\psi(x)$ est alors une fonction continue de x et on a :

$$\psi_n(x) = \psi(x) + \varepsilon_n(x) \quad |\varepsilon_n(x)| < \varepsilon$$

ε étant un nombre positif donné et l'inégalité ayant lieu, quelle que soit la valeur de x prise dans l'intervalle I , pour toutes les valeurs de n supérieures à un certain entier n' .

L'égalité (10) devient :

$$\psi[f(x, \psi(x) + \varepsilon_n(x))] + \varepsilon_{n+1}[f(x, \psi(x) + \varepsilon_n(x))] = \varphi[x, \psi(x) + \varepsilon_n(x)].$$

La quantité $X = f[x, \psi(x) + \varepsilon_n(x)]$ appartient à l'intervalle I , quel que soit x pris dans cet intervalle, puisqu'on suppose que les fonctions ψ_n et ψ_{n+1} sont définies toutes les deux dans l'intervalle I . En faisant croître n indéfiniment, $\varepsilon_{n+1}[f(x, \psi(x) + \varepsilon_n(x))]$ tend donc vers zéro et en égalant les limites des deux membres de l'égalité, on obtient :

$$\psi[f(x, \psi(x))] = \varphi(x, \psi(x)).$$

Ainsi la fonction ψ vérifie l'équation fonctionnelle précédente, autrement dit la courbe limite est invariante par la substitution.

Même démonstration pour les antécédentes.

Nous allons traiter un exemple où on peut former explicitement l'équation de la n° conséquente et déterminer sa limite, ce qui nous permettra d'établir quelques résultats dont nous aurons à nous servir dans la suite.

13. *Exemple.* — Soit à trouver toutes les courbes invariantes par la substitution :

$$X = Sx \quad Y = S'y. \quad (11)$$

Cette transformation est une *transformation projective*. On sait que SOPHUS LIE et M.^r KLEIN ont déterminé toutes les courbes invariantes par un groupe continu de transformations projectives. Leur méthode met en évidence des relations intéressantes entre la théorie des groupes et la théorie de l'itération (*): pour obtenir des groupes projectifs à un paramètre, ils re-

(*) SOPHUS LIE et KLEIN: *Ueber diejenigen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen linearen Transformationen in sich übergehen* (Math. Annalen, IV, 1871).

Signalons à ce sujet le travail suivant sur les rapports entre la théorie des groupes et la théorie de l'itération à plusieurs variables:

BÖTTCHER: *Beiträge zu der Theorie der Iterationsrechnung* (Inaug. Dissert. Leipzig, 1898).

marquent qu'il suffit de partir d'une transformation projective telle que la transformation (11), de répéter cette transformation n fois, ce qui donne :

$$X = S^n x \quad Y = S'^n y$$

et de remplacer l'entier n par un paramètre continu t ; on obtient ainsi des transformations :

$$X = S^t x \quad Y = S'^t y \quad (12)$$

comprenant la transformation (11) et la transformation identique et ces transformations (12) forment un groupe continu.

Parmi les courbes invariantes que nous cherchons doivent se trouver les courbes qui admettent le groupe (12), mais nous devons aussi obtenir les courbes, s'il en existe, qui admettent la transformation isolée (11).

Une courbe quelconque $y = \theta(x)$ a pour n^e conséquence :

$$y_n = S'^n \theta \left(\frac{x}{S^n} \right).$$

Il faut choisir la fonction θ de façon que y_n ait une limite pour n infini. Posons :

$$\frac{x}{S^n} = t \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log x - \log t}{\log S}.$$

On aura :

$$y_n = S'^{\frac{\log x - \log t}{\log S}} \theta(t) = x^{\frac{\log S'}{\log S}} \frac{\theta(t)}{t^{\frac{\log S'}{\log S}}}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment par valeurs entières, t prend une suite discontinue de valeurs qui a zéro ou l'infini pour limite, suivant la valeur de S ; mais, dans les deux cas, il faut choisir $\theta(t)$ de façon que $\frac{\theta(t)}{t^{\frac{\log S'}{\log S}}}$ ait une

limite : cette limite pourra dépendre de x , puisque la suite discontinue des valeurs de t dépend de x . Donc y_n aura une limite de la forme :

$$\psi(x) = x^{\frac{\log S'}{\log S}} \Omega(x).$$

L'équation fonctionnelle à laquelle satisfait $\psi(x)$,

$$\psi(Sx) = S' \psi(x)$$

devient par la transformation précédente :

$$(Sx)^{\frac{\log S'}{\log S}} \Omega(Sx) = S' x^{\frac{\log S'}{\log S}} \Omega(x)$$

ou bien :

$$\Omega(Sx) = \Omega(x).$$

Posons :

$$\Omega(x) = \omega(\log x).$$

On devra avoir :

$$\omega(\log x + \log S) = \omega(\log x).$$

L'équation générale des courbes invariantes par la substitution (11) est donc :

$$y = x^{\frac{\log S'}{\log S}} \omega(\log x)$$

ω désignant une fonction périodique arbitraire, de période $\log S$.

Complétons ce résultat en montrant que toute courbe invariante $y = \psi(x)$ peut être définie comme limite, pour n infini, de la n^{e} conséquence d'une courbe convenablement choisie. Soit $y = \psi(x) \varepsilon(x)$ l'équation d'une courbe dont la n^{e} conséquence ait pour limite la courbe invariante $y = \psi(x)$: l'équation de la n^{e} conséquence est :

$$y = S'^n \psi \left[\frac{x}{S^n} \right] \varepsilon \left(\frac{x}{S^n} \right)$$

ou

$$y_n = \psi(x) \varepsilon \left(\frac{x}{S^n} \right).$$

Il suffit donc de choisir pour $\varepsilon(x)$ une fonction qui tende vers 1 lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que $|S|$ est supérieur ou inférieur à 1: la n^{e} conséquence de la fonction $\psi(x) \varepsilon(x)$ aura pour limite $\psi(x)$. On obtient donc, comme limite de conséquences, toutes les courbes, analytiques ou non, invariantes par (11).

14. *Etude des courbes invariantes, analytiques ou non.* — Considérons une courbe passant par un point double de la substitution (1): ses antécédentes et ses conséquences passent par le même point double et on peut essayer de définir un domaine d'existence commun à toutes les conséquences et à toutes les antécédentes: le théorème du § 12 permet alors de définir

une courbe invariante comme limite des antécédentes ou des conséquentes successives.

C'est par cette méthode que M.^r HADAMARD (*), a pu établir l'existence, pour le cas de $|S'| < 1 < |S|$, des deux courbes invariantes passant par le point double, sans supposer la substitution donnée analytique.

Nous rappellerons d'abord les résultats obtenus par M.^r HADAMARD, puis nous utiliserons ces résultats pour l'étude générale des courbes invariantes, analytiques ou non, passant par le point double: dans le cas particulier où la substitution est analytique, nous retrouverons ainsi, par une étude indépendante des développements en série, les résultats du § 5.

M.^r HADAMARD considère la substitution (3) où f et φ sont supposés seulement avoir des dérivées continues tendant vers zéro avec x et y : en supposant $|S| > 1$ et $|S| > |S'|$ (**), les conséquentes successives peuvent être définies dans un domaine commun et elles ont une limite C qui est une courbe invariante: la courbe limite est indépendante de la courbe initiale qui est assujettie seulement à avoir des tangentes dont les coefficients angulaires doivent être compris entre certaines limites. Si en même temps, on a $|S'| < 1$, les antécédentes ont aussi une limite qui est une deuxième courbe invariante C' . Dans le cas actuel, *ces deux courbes sont les seules courbes invariantes passant par l'origine*.

Dans le cas où $|S|$ et $|S'|$ ne comprennent pas 1, la démonstration de M.^r HADAMARD donne encore un résultat qu'il importe, pour la suite, de bien préciser. Supposons, par exemple $|S|$ et $|S'|$ inférieurs à 1. La démonstration (appliquée à la substitution inverse de (3)) prouve l'existence d'une courbe invariante C qu'on obtient comme limite des antécédentes d'une courbe arbitraire passant par l'origine. Mais deux cas sont à distinguer.

1.^o $|S'| < |S| < 1$. La courbe C est tangente à Oy et c'est la seule courbe invariante aboutissant à l'origine, régulière, et *non tangente* à Ox .

Son équation est de la forme:

$$x = [y^2]$$

$[y^2]$ désignant une fonction de y , du second ordre au moins par rapport à l'infiniment petit y .

(*) HADAMARD, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*. (Bulet. de la Société Mathématique de France, comptes-rendus des séances, 1901).

(**) M.^r HADAMARD suppose S positif, mais on voit aisément que la démonstration subsiste quel que soit le signe de S .

2.^o $|S| < |S'| < 1$. La courbe C est tangente à Ox et c'est la seule courbe invariante passant par l'origine et *non tangente* à Oy . Son équation est de la forme :

$$y = [x^2].$$

14.^{bis} Ces résultats étant rappelés, nous supposons, dans tout ce qui suit :

$$|S'| < |S| < 1$$

le cas où les racines auraient des modules supérieurs à 1 se ramènerait à celui-ci en remplaçant la substitution donnée par son inverse. Les fonctions f et φ seront supposées avoir des dérivées premières continues et tendant vers zéro avec x et y .

La démonstration de M.^r HADAMARD fournit alors une courbe invariante C tangente à Oy : mais ce résultat est compatible avec l'existence d'autres courbes invariantes tangentes à Ox . Il est facile d'en obtenir une infinité. Ce sont ces courbes que nous allons définir et étudier, en caractérisant d'une façon particulière l'une d'elles C' qui, lorsque les données seront analytiques, deviendra la courbe analytique tangente à Ox , que nous avons obtenue au § 5 par la méthode des fonctions majorantes. Nous nous appuierons sur les remarques suivantes :

1.^o Les coordonnées x_n, y_n du n^{e} conséquent P_n d'un point P pris dans le domaine du point double tendent vers zéro pour n infini.

Cette proposition a été établie au § 8, mais comme conséquence de l'existence des courbes analytiques invariantes : il faut donc reprendre la démonstration dans le cas actuel. On a :

$$|x_n| < |S| |x_{n-1}| + \tau |x_{n-1}| + |y_{n-1}|$$

$$|y_n| < |S'| |y_{n-1}| + \tau [|x_{n-1}| + |y_{n-1}|]$$

τ étant un nombre positif fixe tendant vers zéro avec les dimensions du domaine dans lequel la substitution est définie. Si l'on a : $|x_{n-1}| < h$, $|y_{n-1}| < h$, il en résulte :

$$|x_n| < [|S| + 2\tau] h \quad |y_n| < [|S'| + 2\tau] h$$

inégalités qui prouvent que $|x_n|, |y_n|$ sont inférieurs à h , si $|S| + 2\tau$ et $|S'| + 2\tau$ sont inférieurs à 1, ce qui a lieu pourvu que h soit suffisamment petit. De plus, si l'on a : $|x| < h, |y| < h$, l'application répétée des inégalités

précédentes conduit à

$$|x_n| < [|S| + 2n]^n h \quad |y_n| < [|S'| + 2n]^n h$$

et x_n, y_n tendent bien vers zéro.

2.° La droite OP_n a pour limite Ox pour n infini, du moins si la droite initiale est suffisamment voisine de Ox . Posons en effet:

$$\frac{y}{x} = t \quad \frac{Y}{X} = T.$$

La substitution donnée (3) devient:

$$\left. \begin{aligned} X &= Sx + f(x, tx) \\ T &= \frac{S' tx + \varphi(x, tx)}{Sx + f(x, tx)} = \frac{S'}{S} t + \alpha x + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)'$$

L'équation en S relative à cette substitution a pour racines S et $\frac{S'}{S}$. Ces racines sont inférieures à 1 en module: donc il existe un nombre h_1 tel que x_n et t_n tendent vers zéro si $|x|$ et $|t|$ sont inférieurs à h_1 . La proposition est établie.

Ceci posé, il y a une infinité de courbes invariantes tangentes en O à Ox . Montrons comment on peut les construire, lorsque S et S' sont positifs. Soient $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ les conséquents d'un point P arbitraire. Joignons P et P_1 par un arc de courbe continu et ayant une tangente en chaque point: à cet arc la substitution fait correspondre successivement les arcs conséquents $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots$. L'ensemble de ces arcs et du point O constitue une courbe invariante tangente en O à Ox , si pour les différents points de l'arc initial le rapport $\frac{y}{x}$ est suffisamment petit. La dérivée de la fonction ainsi définie présente en général une infinité de discontinuités en $P_1, P_2, \dots$, mais on peut, si l'on veut, choisir l'arc PP_1 de façon que la dérivée soit continue. Il suffit de considérer la substitution (3) *prolongée*. On a:

$$Y' = \frac{S' y' + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{S + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'}.$$

Soit (x, y, y') l'élément d'où part l'arc PP_1 et (x_1, y_1, y'_1) son conséquent:

si l'arc PP_1 contient ce dernier élément, les points $P_1, P_2, \dots$ cessent d'être anguleux et la dérivée devient continue.

Si on ne fait aucune nouvelle hypothèse, rien ne distingue les diverses courbes ainsi obtenues: elles représentent toutes des fonctions continues ayant une dérivée première continue.

A un autre point de vue, la recherche des courbes invariantes tangentes à Ox revient à la recherche des courbes invariantes par la nouvelle substitution (3)' et passant par le point double $x = t = 0$.

La substitution (3)' peut être ramenée à la forme canonique par un changement de variables de la forme:

$$t = u + \lambda x$$

et elle devient:

$$\begin{cases} X = Sx + f_1(x, u) \\ U = \frac{S'}{S} u + \varphi_1(x, u). \end{cases} \quad (3)''$$

Appliquons à cette substitution les résultats obtenus par M.^r HADAMARD et rappelés au § 14. Il faut supposer que f_1 et φ_1 ont des dérivées partielles continues et tendant vers zéro avec x et u : cela aura lieu en particulier si nous supposons que f et φ ont des dérivées partielles continues, non seulement du premier ordre, mais aussi du second ordre. Deux cas sont à distinguer, suivant que $|S|$ est inférieur ou supérieur à $\left|\frac{S'}{S}\right|$, le cas de l'égalité étant écarté: cela revient à supposer $|S'|$ supérieur ou inférieur à S^2 .

1.^o S' est supérieur à S^2 , autrement dit S' est compris entre $|S|$ et S^2 . La substitution (3'') admet une courbe invariante:

$$u = (x^2)$$

d'où:

$$y = (u + \lambda x) x = [x^2]$$

qui est la seule pour laquelle $\frac{u}{x}$, c'est-à-dire $\frac{y}{x^2}$ ait une limite finie: c'est la seule courbe invariante tangente à Ox pour laquelle la dérivée seconde à l'origine soit finie. Lorsque les données deviennent analytiques, cette courbe C' devient la courbe analytique invariante tangente à Ox , obtenue au § 5.

2.^o $|S'|$ est inférieur à S^2 , autrement dit $|S'|$ est inférieur, non seulement à $|S|$, mais aussi à S^2 .

La substitution (3)'' admet alors (§ 14) une courbe invariante ayant une équation de la forme :

$$x = [u^2]$$

d'où :

$$y = tx = (u + \lambda x) x = [u^3].$$

Ces équations définissent une courbe tangente à Ox , *mais non régulière à l'origine*: c'est la seule courbe tangente à Ox pour laquelle $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire $\frac{y}{x^2} - \lambda$ ne tende pas vers zéro. Toutes les autres courbes invariantes, en nombre infini, tangentes à Ox sont telles que $\frac{y}{x^2}$ ait pour limite λ : on les obtient par le procédé géométrique indiqué plus haut. Ainsi, *il y a une infinité de courbes invariantes tangentes en O à Ox et ayant toutes à l'origine la même dérivée seconde égale à 2λ .*

Si on ne fait aucune nouvelle hypothèse, *rien ne distingue encore les diverses courbes ainsi obtenues.*

Mais, si on suppose que f et φ ont des dérivées partielles du troisième ordre continues, on pourra procéder avec (3)'' comme on avait opéré avec (3) et on est conduit à distinguer deux nouveaux cas *suyant que $|S'|$ est supérieur ou inférieur à S^3* . Dans le premier cas, *on obtient une courbe invariante C' tangente à Ox , et une seule, pour laquelle la dérivée troisième à l'origine soit finie*. Dans le second cas, *il y a une infinité de courbes invariantes, ayant toutes à l'origine une même dérivée seconde égale à 2λ et une même dérivée troisième μ et pour aller plus loin, il faut faire une nouvelle hypothèse sur les dérivées du quatrième ordre. Et ainsi de suite.*

En général, on voit donc qu'on obtient les résultats suivants:

Soit n le plus petit entier vérifiant les inégalités $|S^n| < |S'| < S$. En appliquant plusieurs fois de suite à la substitution donnée des transformations alternativement de l'une des formes:

$$y = tx \quad t = u + \lambda_1 x$$

on arrivera à une substitution:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = Sx + I'(x, \theta) \\ \Theta = \frac{S'}{S^{n-1}}\theta + \Phi(x, \theta) \end{array} \right.$$

pour laquelle on aura :

$$\left| \frac{S'}{S^{n-1}} \right| > |S|.$$

Si on suppose que les fonctions f et φ ont des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n continues, on est assuré que F' et Φ ont des dérivées du premier ordre continues et on peut appliquer à la substitution en x, θ les résultats obtenus par M.^r HADAMARD (§ 14) : la substitution en x, θ admet une courbe invariante :

$$\theta = |x^2|$$

qui est la seule pour laquelle $\frac{b}{x}$ ne tende pas vers l'infini lorsque x tend vers zéro.

Si on revient à la substitution en x, y , on obtient une courbe C' ayant une équation de la forme :

$$y = \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_n x^n + |x^{n+1}|$$

(les λ_i étant les coefficients des formules de transformation successives de la forme : $t = u + \lambda_i x$).

et cette courbe C' est la seule tangente à Ox pour laquelle la dérivée n^e à l'origine soit finie.

Il y a en outre une infinité de courbes invariantes tangentes à Ox , mais pour lesquelles la dérivée n^e à l'origine est infinie : on les obtient par le procédé géométrique indiqué plus haut (*).

Lorsque les données deviennent analytiques, la courbe C' devient la courbe analytique invariante tangente à Ox . On voit le rôle différent joué par les deux courbes C et C' , dans le cas de données non analytiques.

L'hypothèse $S' = |S^n|$ à laquelle conduisait le calcul formel du § 3 est ici remplacée par : $|S'| = |S^n|$: le cas $S' = -S^n$, qui n'avait pas été écarté dans la méthode des fonctions majorantes, n'est donc pas traité par la méthode actuelle.

On voit de plus que, par des transformations convenables, le cas où l'on aurait $S' = S^n$ se ramène en définitive au cas des racines égales $S' = S$.

(*) On verra plus loin (§ 27) une forme générale qu'on peut donner à l'équation des courbes invariantes, analytiques ou non.

15. *Points limites oscillants ou points à convergence irrégulière.* — M.^r KÆNIGS a introduit, dans l'étude de l'itération à une variable, la notion importante de convergence irrégulière (*). Cette notion s'étend au cas de deux ou plusieurs variables.

Etant donnée la substitution (1), désignons cette substitution par S^1 et ses puissances par $S^2, S^3, \dots$. Nous dirons avec M.^r KÆNIGS qu'un point double de la substitution S^p appartient à l'indice p s'il n'est point double d'aucune substitution S^n d'indice inférieur à p . Nous énoncerons, sans les démontrer, les propositions suivantes établies par M.^r KÆNIGS dans le cas d'une variable et pour lesquelles la démonstration subsiste entièrement.

1.^o Si O_1 est un point double de S^p , c'est aussi un point double de S^{kp} , k étant un entier positif ou négatif.

2.^o Si O_1 est un point double de S^p , les conséquents $O_2, O_3, \dots, O_p$ qu'on en déduit par la substitution (1) sont aussi points doubles de S^p .

3.^o Si O_1 appartient à l'indice p , il en est de même de $O_2, O_3, \dots, O_p$.

4.^o Les points doubles d'indice p de la substitution S^p se distribuent en cycles de p points doubles permutablement circulairement par la substitution (1).

Soit maintenant M un point, $M_1, M_2, \dots$ les conséquents et $M_{-1}, M_{-2}, \dots$ les antécédents qu'on en déduit par la substitution (1). Il peut arriver que ces conséquents et ces antécédents n'aient pas de point limite, mais qu'en prenant les points $M_p, M_{2p}, \dots, M_{kp}, \dots$ dont l'indice est divisible par p , la suite de ces points ait un point limite: ce point limite est alors un point double de la substitution S^p . M.^r KÆNIGS l'appelle *point limite à convergence irrégulière*. M.^r POINCARÉ, qui a considéré aussi de pareils points, les appelle des *points limites oscillants* (**).

Soit $O_1, O_2, \dots, O_p$ un cycle de p points appartenant à l'indice p et permutablement par la substitution S^1 . Formons l'équation en S relative à la substitution S^p et au point double O_1 . Si les racines de cette équation sont distinctes, différentes de 0 et si aucune des deux racines n'est une puissance entière de l'autre, il existe (§ 5) deux courbes C_1, C'_1 invariantes par la substitution S^p et définies dans le domaine de O_1 . Par la substitution (1),

(*) KÆNIGS, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bullet. des Sciences Mathématiques, 1883.)

(**) POINCARÉ, *Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes*. (Journal de Math. pures et appliquées, 1890.)

ces deux courbes auront pour conséquentes deux courbes C_2, C'_2 passant par O_2 et définies dans le domaine de O_2 , celles-ci deux courbes C_3, C'_3 définies dans le domaine de O_3 , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on revienne aux courbes C_1, C'_1 . *Il existe donc deux cycles de p courbes $C_1, C_2, \dots, C_p$ et $C'_1, C'_2, \dots, C'_p$, ces courbes étant définies respectivement dans des domaines entourant $O_1, O_2, \dots, O_p$ et les courbes de chaque cycle se permutant circulairement par la substitution (1).*

Au point de vue purement analytique, on a déterminé ainsi un système de p fonctions $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_p(x)$ vérifiant le système d'équations fonctionnelles suivant :

$$\begin{aligned} \zeta_2[f(x, \zeta_1(x))] &= \zeta[x, \zeta_1(x)] \\ \zeta_3[f(x, \zeta_2(x))] &= \zeta[x, \zeta_2(x)] \\ &\vdots \\ \zeta_{i_{j-1}}[f(x, \zeta_{i_{j-1}}(x))] &= \zeta[x, \zeta_{i_{j-1}}(x)] \\ \zeta_1[f(x, \zeta_{i_j}(x))] &= \zeta[x, \zeta_{i_j}(x)]. \end{aligned}$$

Il peut arriver que la substitution S'' admette une courbe de points doubles C_1 (§ 6); il existe alors un cycle de p courbes $C_1, C_2, \dots, C_p$ permutablement circulairement par la substitution S^1 et possédant la propriété suivante: tout point O_1 de l'une de ces courbes C_1 coïncide avec son p^e conséquent O_{p+1} , les conséquents $O_2, O_3, \dots, O_p$ étant respectivement sur $C_2, C_3, \dots, C_p$. Dans ce cas il résulte du § 6 que par le point O_1 passe une courbe C'_1 autre que C_1 et invariante par S'' : cette courbe donnera naissance à un cycle de courbes $C'_1, C'_2, \dots, C'_p$ définies respectivement dans des domaines entourant $O_1, O_2, \dots, O_p$ et permutablement circulairement par S^1 .

Passons à l'étude de l'itération d'un point M_1 pris dans le domaine d'un point double O_1 de la substitution S^p appartenant à l'indice p ; la disposition des conséquents et des antécédents successifs de M_1 résulte immédiatement des propositions établies dans le cas où p est égal à 1 (§§ 8 à 11). Cette disposition dépend des racines de l'équation en S relative à la substitution S^p : par exemple si les racines sont réelles et inférieures en module à 1, si de plus aucune des deux racines n'est une puissance entière de l'autre, les conséquents pris de p en p ont pour limite un des points $O_1, O_2, \dots, O_p$ formant avec O_1 un cycle de points oscillants, tandis que, pris de un en un, ils oscillent du voisinage de O_1 au voisinage de O_2 , puis de O_3 et ainsi de suite.

Il n'y a aucune difficulté à généraliser de même les autres résultats.

CHAPITRE II.

L'ITÉRATION A TROIS VARIABLES.

16. Soit donnée une substitution à trois variables:

$$X = f(x, y, z) \quad Y = \varphi(x, y, z) \quad Z = \theta(x, y, z) \quad (1)$$

et un point double de cette substitution que nous prendrons pour origine. Formons l'équation en S relative au point double:

$$\begin{vmatrix} f'_{x_0} - S & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ \varphi'_{x_0} & \varphi'_{y_0} - S & \varphi'_{z_0} \\ \theta'_{x_0} & \theta'_{y_0} & \theta'_{z_0} - S \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Supposons les racines S, S', S'' de cette équation distinctes: la substitution donnée peut alors se ramener à la forme suivante, par un changement de variables:

$$\left. \begin{aligned} X &= S' x + f(x, y, z) \\ Y &= S' y + \varphi(x, y, z) \\ Z &= S' z + \theta(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

f, φ, θ sont des fonctions que nous supposerons holomorphes dans le domaine de l'origine et qui s'annulent ainsi que leurs dérivées du premier ordre pour $x = y = z = 0$.

On peut se proposer de chercher soit *des courbes*, soit *des surfaces* analytiques invariantes par cette substitution et passant par le point double. Nous suivrons la même méthode que dans le cas de deux variables et nous commencerons par la recherche des courbes, qui conduit à des résultats tout pareils à ceux établis pour deux variables.

17. *Courbes invariantes.* — Une courbe analytique invariante passant par l'origine a nécessairement pour tangente l'une des droites Ox, Oy, Oz . Cherchons une courbe invariante tangente à Ox et soient:

$$y = \psi(x) \quad z = \chi(x)$$

ses équations. Les fonctions ψ et χ vérifient le système d'équations fonctionnelles:

$$\left. \begin{aligned} \psi [Sx + f(x, \psi(x), \chi(x))] &= S' \psi(x) + \varphi(x, \psi(x), \chi(x)) \\ \chi [Sx + f(x, \psi(x), \chi(x))] &= S'' \chi(x) + \theta(x, \psi(x), \chi(x)). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Posons, pour simplifier les notations:

$$\psi(x) = y \quad \chi(x) = z \quad Sx + f(x, y, z) = v.$$

Les équations (4) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \psi(v) &= S' y + \varphi(x, y, z) \\ \chi(v) &= S'' z + \theta(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En prenant les dérivées successives des deux membres de chacune de ces équations par rapport à x et en remplaçant x par zéro, on obtient des égalités permettant de calculer les coefficients $\psi''_0, \psi'''_0, \dots$ et $\chi''_0, \chi'''_0, \dots$ des séries ψ et χ . On voit immédiatement que ce calcul donne lieu aux mêmes remarques que dans le cas de deux variables (§ 4). Nous nous bornerons à énoncer la conclusion à laquelle on arrive, les démonstrations étant les mêmes:

Considérons les dérivées à l'origine $y'_0, y''_0, \dots, y^{(p)}_0$ de y ou $\psi(x)$ comme étant respectivement de poids 0, 1, 2, ..., $(p-1)$ et de même pour $z'_0, z''_0, \dots, z^{(p)}_0$ dérivées de z ou $\chi(x)$. Nous obtiendrons, en dérivant les deux équations (5) par rapport à x , deux égalités de la forme:

$$\begin{aligned} (S' - S'') \psi^{(n)}_0 &= \varpi_1 (\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0; \chi''_0, \chi'''_0, \dots, \chi^{(n-1)}_0) \\ (S'' - S'') \chi^{(n)}_0 &= \varpi_2 (\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0; \chi''_0, \chi'''_0, \dots, \chi^{(n-1)}_0) \end{aligned}$$

ϖ_1 et ϖ_2 étant des polynômes en $\psi''_0, \psi'''_0, \dots, \psi^{(n-1)}_0; \chi''_0, \chi'''_0, \dots, \chi^{(n-1)}_0$ de poids $n-2$ par rapport à ces quantités.

Le calcul formel est possible, si on suppose que S' et S'' ne sont pas des puissances entières de S . Dans le cas contraire, on est conduit en général à une impossibilité dans le calcul des coefficients et par suite il n'y a pas en général de solution holomorphe des équations fonctionnelles considérés: il peut arriver cependant qu'on soit conduit à une indétermination et il y aurait lieu de voir si la convergence des séries obtenues, est encore assurée dans ce cas, comme nous allons montrer qu'elle l'est pour le cas général

Mais nous laisserons ce cas de côté, en nous bornant au cas général où le calcul formel est possible.

Il reste donc à établir la convergence des séries obtenues, en supposant $S' - S''$ et $S'' - S^n$ différents de 0, quel que soit n .

On peut toujours supposer $|S| < 1$ en remplaçant au besoin la substitution donnée par son inverse, qui admet évidemment les mêmes courbes invariantes qu'elle: le seul cas ainsi omis est le cas limite où l'on aurait $|S| = 1$. Considérons la substitution auxiliaire.

$$\left. \begin{aligned} X &= S_1 x + 2 F(x, y, z) \\ Y &= S_1 y - F(x, y, z) \\ Z &= S_1 z - F(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où S_1 désigne un nombre compris entre $|S|$ et 1 et $F(x, y, z)$ la fonction majorante :

$$F(x, y, z) = \frac{M \beta^2 (x + y + z)^2}{1 - \beta (x + y + z)}.$$

Il existe un nombre λ plus petit que 1, inférieur quel que soit n aux deux quantités $\frac{|S' - S''|}{S_1 - S_1^n}$ et $\frac{|S'' - S^n|}{S_1 - S_1^n}$.

Désignons par $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ les séries analogues à $\psi(x)$ et à $\chi(x)$ pour la substitution (6): ces séries ont tous leurs coefficients positifs et, à cause de la remarque énoncée plus haut relativement aux poids des coefficients, on aura, comme pour deux variables (§ 5):

$$|\psi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \psi_{x,0}^{(n)} \quad \text{et} \quad |\chi_0^{(n)}| < \frac{1}{\lambda^{n-1}} \chi_{1,0}^{(n)}.$$

Si on démontre la convergence des séries $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ dans un cercle de rayon ρ , il résultera de là que les séries ψ et χ seront convergentes dans le cercle de rayon $\lambda \rho$.

Pour prouver la convergence des séries ψ_1 et χ_1 , il suffit de montrer qu'il existe une courbe analytique invariante par la substitution (6) et tangente à Ox . Posons :

$$\begin{aligned} x + y &= u & x + z &= v & x + y + z &= w \\ X + Y &= U & X + Z &= V & X + Y + Z &= W. \end{aligned}$$

La substitution (6) devient :

$$U = S_1 u + \frac{M \beta^2 w^2}{1 - \beta w} \quad V = S_1 v - \frac{M \beta^2 w^2}{1 - \beta w} \quad W = S_1 w$$

d'où l'on déduit, comme dans le cas de deux variables (§ 5), la courbe invariante :

$$u = v = w - \frac{M \beta^2 w^2}{S_1 - S_1^2} - \frac{M \beta^3 w^3}{S_1 - S_1^3} - \dots - \frac{M \beta^n w^n}{S_1 - S_1^n}$$

série convergente si l'on a $|w| < \frac{1}{\beta}$.

On en déduit une courbe invariante par (6) et tangente à Ox : elle a pour équations :

$$y = z = \frac{M \beta^2 (x + y + z)^2}{S_1 - S_1^2} + \dots + \frac{M \beta^n (x + y + z)^n}{S_1 - S_1^n} \dots$$

Les fonctions y et z de x définies implicitement par ces équations sont les fonctions $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ cherchées.

On démontre de même l'existence de deux courbes analytiques invariantes tangentes respectivement à Oy et à Oz .

La méthode ainsi employée montre que les trois courbes obtenues sont les seules courbes analytiques (*) invariantes passant par le point double. On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Etant donnée une substitution à trois variables, si les racines de l'équation en S relative à un point double de la substitution sont distinctes, de module différent de 0 et de 1 et si aucune des racines n'est une puissance entière d'une autre racine, il existe trois courbes analytiques invariantes par la substitution, et trois seulement, passant par le point double et définies dans le domaine de ce point.*

Remarque. — La démonstration subsiste pour un nombre quelconque de variables. La substitution :

$$X_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(*) Rappelons que nous entendons par courbe analytique (§ 1) une courbe telle que deux au moins des coordonnées x, y, z puissent s'exprimer par des fonctions holomorphes de la troisième.

Une surface analytique sera de même une surface telle que l'une au moins des trois coordonnées x, y, z puisse s'exprimer en fonction holomorphe des deux autres.

admet en un point double n courbes analytiques invariantes, si l'équation en S a ses racines distinctes, de module différent de 0 et de 1 et si aucune des racines n'est une puissance entière d'une autre racine. Nous obtenons ainsi, dans le domaine d'un pareil point (*), $n-1$ fonctions holomorphes $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_1), \dots, \psi_{n-1}(x_1)$ vérifiant le système fonctionnel suivant :

$$\psi_i[f_1(x_1, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})] = f_i(x_1, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

18. *Surfaces invariantes.* — Cherchons maintenant une surface analytique invariante par la substitution (3) et passant par l'origine. Le plan tangent à l'origine doit être l'un des plans de coordonnées.

Cherchons une surface tangente au plan xoy et soit :

$$z = \psi(x, y) = \frac{1}{1.2} (z_{1,0} x^2 + 2 z_{1,1} x y + z_{0,2} y^2) + \frac{1}{1.2.3} (z_{3,0} x^3 + 3 z_{2,1} x^2 y + \dots) + \dots$$

son équation. Nous désignons par $z_{\alpha,\beta}$ la valeur prise par la dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ pour $x=y=0$. On a : $z_{1,0} = 0$ $z_{0,1} = 0$. Pour calculer les autres dérivées, écrivons l'équation fonctionnelle que doit vérifier la fonction $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \psi[Sx + f(x, y, \psi(x, y)), S'y + \varphi(x, y, \psi(x, y))] &= \\ &= S''\psi(x, y) + \theta(x, y, \psi(x, y)). \end{aligned}$$

Posons pour simplifier :

$$\psi(x, y) = z \quad Sx + f(x, y, z) = v \quad S'y + \varphi(x, y, z) = w \quad \theta(x, y, z) = u.$$

(*) Les courbes invariantes sont ainsi définies dans le voisinage de l'origine: dans certains cas, on pourra, à l'aide de la substitution donnée, faire le prolongement analytique des fonctions invariantes dans d'autres régions du plan. Dans son mémoire: *Sur une classe de transcendentes nouvelles*. (Acta Mathematica, tomes 18 et 23). M. PICARD définit ainsi dans tout le plan des transcendentes uniformes $y, z, \dots, t$ de la variable x invariantes par la substitution rationnelle :

$$X = mx \quad Y = f(y, z, \dots, t) \quad Z = \varphi(y, z, \dots, t) \dots, \quad T = \theta(y, z, \dots, t)$$

et présentant des singularités essentielles. Mr. POINCARÉ a étudié les fonctions invariantes par une substitution de la même forme et n'ayant pas pour $x=0$ de point singulier essentiel (*Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes*. Journal de Mathématiques, 1890).

L'équation fonctionnelle devient:

$$\psi(v, w) = S''z + u. \quad (7)$$

On calculera les dérivées $z_{\alpha, \beta}$ en prenant les dérivées des deux membres de cette équation (7) par rapport à x et à y et en y remplaçant x et y par zéro. En prenant les dérivées α fois par rapport à x et β fois par rapport à y et en désignant toujours par $f_{\alpha, \beta}$ la valeur prise par la dérivée $\frac{\partial^{\alpha, \beta} f}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}$ d'une fonction f de x et de y pour $x = y = 0$, on obtient:

$$[\psi(v, w)]_{\alpha, \beta} = S'' z_{\alpha, \beta} + u_{\alpha, \beta}. \quad (8)$$

Le calcul des quantités $u_{\alpha, \beta}$ donne successivement:

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= 0 & u_{0,1} &= 0 \\ u_{2,0} &= \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_0 & u_{1,1} &= \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right)_0 & u_{0,2} &= \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)_0 \\ u_{3,0} &= \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right)_0 + 3 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right)_0 z_{2,0} & u_{2,1} &= \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \right)_0 + \\ & & & 2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right)_0 z_{1,1} + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x} \right)_0 z_{2,0} & u_{1,2} &= \dots \\ & & & & & \dots \end{aligned}$$

Le calcul des quantités $[\psi(v, w)]_{\alpha, \beta}$ donne de même successivement:

$$\begin{aligned} [\psi(v, w)]_{1,0} &= 0 & [\psi(v, w)]_{0,1} &= 0 \\ [\psi(v, w)]_{2,0} &= S'' z_{2,0} & [\psi(v, w)]_{1,1} &= S' S' z_{1,1} & [\psi(v, w)]_{0,2} &= S'' z_{0,2} \\ [\psi(v, w)]_{3,0} &= S'' z_{3,0} + 3 S' v_{2,0} z_{2,0} + 3 S' w_{2,0} z_{1,1} \\ [\psi(v, w)]_{2,1} &= S'' S' z_{2,1} + 2 S' v_{1,1} z_{2,0} + 2 S' w_{1,1} z_{1,1} + S' v_{2,0} z_{1,1} + S' w_{2,0} z_{0,2} \\ & & & \dots \end{aligned}$$

Dans ces formules $v_{i,j}$ et $w_{i,j}$ doivent être remplacées par leurs valeurs en fonction des quantités $z_{\alpha, \beta}$, valeurs qu'on calcule comme on a calculé $u_{\alpha, \beta}$.

Ces formules montrent que l'équation (8) prend la forme:

$$S^{\alpha} S'^{\beta} z_{\alpha, \beta} = S'' z_{\alpha, \beta} + \varpi_{\alpha, \beta}(z_{2,0}, z_{1,2}, z_{0,2}, z_{3,0}, z_{2,1}, \dots, z_{\alpha, \beta}, \dots)$$

$\varpi_{\alpha, \beta}$ étant un polynôme par rapport aux dérivées z_{ij} pour lesquelles $i+j$ est inférieur à $\alpha + \beta$. On démontre en outre, comme on l'a fait au § 4 pour

le cas de deux variables, que le polynôme $\varpi_{\alpha,\beta}$ est de poids $\alpha + \beta - 2$, si on attribue à $z_{i,j}$ le poids $i + j - 1$: les coefficients de ce polynôme dépendent de S, S' et des valeurs des dérivées partielles des fonctions f, φ, θ pour $x = y = z = 0$.

L'égalité précédente permet de calculer $\psi_{\alpha,\beta}$ lorsqu'on a calculé toutes les dérivées d'ordre inférieur à $\alpha + \beta$, à condition que $S'' - S^\alpha S'^\beta$ ne soit pas nul.

Nous supposons donc que $S'' - S^\alpha S'^\beta$ n'est nul pour aucune valeur positive ou nulle des entiers α, β . Le calcul formel des coefficients est alors possible.

Nous supposons aussi que $|S|$ et $|S'|$ sont tous deux inférieurs ou tous deux supérieurs à 1: la démonstration de la convergence de la série peut alors se faire comme pour deux variables.

Nous pouvons toujours supposer que $|S|$ et $|S'|$ sont tous deux inférieurs à 1, en remplaçant au besoin la substitution donnée par son inverse.

Considérons la substitution auxiliaire:

$$\left. \begin{aligned} X &= S_1 x + F(x, y, z) \\ Y &= S_1 y + F(x, y, z) \\ Z &= S_1 z - 2 F(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

dans laquelle $F(x, y, z)$ désigne la fonction $\frac{M \beta^2 (x + y + z)^2}{1 - \beta (x + y + z)}$, majorante pour f, φ, θ et S_1 un nombre inférieur à 1 et supérieur à la fois à $|S|$ et à $|S'|$. Désignons par $\psi^1(x, y)$ la série analogue à $\psi(x, y)$ obtenue en remplaçant la substitution (3) par la substitution (9).

La quantité $\frac{|S'' - S^\alpha S'^\beta|}{S_1 - S_1^{\alpha+\beta}}$ est supérieure, pour toutes les valeurs des entiers α, β à un certain nombre positif λ qu'on peut toujours supposer inférieur à 1 (*) et on a:

$$|S'' - S^\alpha S'^\beta| > \lambda (S_1 - S_1^{\alpha+\beta}).$$

(*) Cela résulte des hypothèses $|S| < 1$ $|S'| < 1$. Si, au contraire, 1 était compris entre $|S|$ et $|S'|$, l'ensemble des nombres $S'' - S^\alpha S'^\beta$ pourrait avoir zéro comme valeur limite. En supposant S, S', S'' positifs, cela revient à chercher dans quel cas la droite

$$x \log S + y \log S' - \log S'' = 0$$

passé à une distance minimum non nulle de tous les sommets du quadrillage formé par

Il résulte alors de la valeur trouvée plus haut pour $\psi_{\alpha,\beta}$ et des propriétés relatives au poids de $z_{\alpha,\beta}$ que l'on a, comme dans le cas de deux variables (§ 5):

$$|z_{\alpha,\beta}| < \frac{1}{\lambda^{\alpha+\beta-1}} z_{\alpha,\beta}^1.$$

Il ne reste plus qu'à prouver la convergence de la série ψ^1 dans un certain domaine $|x| < \rho$, $|y| < \rho$ pour qu'il en résulte la convergence de la série ψ dans le domaine $|x| < \lambda \rho$, $|y| < \lambda \rho$.

La démonstration s'achève comme dans le cas de deux variables. Posons:

$$\begin{array}{lcl} x + y = u & \text{et} & X + Y = U \\ x + y + z = v & & X + Y + Z = V. \end{array}$$

La substitution (9) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = S_1 u + \frac{2M\beta^2 v^2}{1-\beta v} \\ V = S_1 v \end{array} \right.$$

et on en déduit la surface analytique, invariante par (9) et tangente au plan xOy , qui a pour équation:

$$z = \frac{2M\beta^2}{S_1 - S_1^2} (x + y + z)^2 + \frac{2M\beta^3}{S_1 - S_1^3} (x + y + z)^3 + \dots$$

La série $\psi^1(x, y)$ s'obtient en résolvant cette équation par rapport à z .

Ainsi l'existence d'une surface analytique invariante tangente au plan xOy est établie en supposant que S'' n'est pas de la forme $S^\alpha S'^\beta$ (α, β entiers positifs ou nuls) et que $|S|$ et $|S'|$ sont tous deux inférieurs ou tous deux supérieurs à 1 (*).

les points du plan dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs ou nuls: on est assuré qu'il en est ainsi si le coefficient angulaire de la droite est négatif ($\log S$ et $\log S'$, de même signe) tandis que, s'il est positif et incommensurable, la droite passe aussi près qu'on le veut d'une infinité de sommets du quadrillage, d'après un théorème bien connu sur les incommensurables.

(*) La proposition ainsi énoncée appelle de nouvelles recherches, que je dois me borner à signaler:

1.° Dans le cas où 1 est compris entre $|S|$ et $|S'|$, la méthode ne s'applique plus et il resterait à étudier la série dans ce cas; des difficultés de même nature se présentent dans

19. *Formes canoniques de la substitution à trois variables.* — Supposons que les trois racines S, S', S'' soient distinctes et qu'aucune des trois racines ne soit le produit de deux puissances à exposants entiers positifs ou nuls des deux autres racines. Il convient, pour appliquer la proposition précédente, de distinguer deux cas:

PREMIER CAS: $|S|, |S'|, |S''|$ sont tous trois inférieurs ou tous trois supérieurs à 1. — La méthode précédente montre qu'il existe trois surfaces analytiques invariantes, et trois seulement, passant par le point double, une tangente à chacun des plans de coordonnées. On démontrera alors, comme dans le cas de deux variables (§ 7) qu'on peut ramener la substitution à la forme:

$$\left. \begin{aligned} X &= x [S + F(x, y, z)] \\ Y &= y [S' + \Phi(x, y, z)] \\ Z &= z [S'' + \Theta(x, y, z)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

F, Φ, Θ étant trois fonctions nulles pour $x = y = z = 0$ et holomorphes dans le domaine de l'origine.

Les intersections mutuelles des trois surfaces invariantes prises deux à deux sont les trois courbes invariantes dont nous avons établi l'existence au § 17.

DEUXIÈME CAS: Le nombre 1 est compris entre la plus grande et la plus petite des quantités $|S|, |S'|, |S''|$. — La méthode précédente ne démontre plus que l'existence d'une seule surface analytique invariante passant par

l'étude des points singuliers des équations différentielles où l'on rencontre des développements dans les termes desquels entrent en dénominateur des expressions de la forme $\alpha S_1 + \beta S_2 - S_3$ (α, β entiers) pouvant devenir aussi petites qu'on le veut (Cf. DULAC, *Recherches sur les points singuliers des équat. différentielles*, Thèse 1903, page 24).

2.° Dans le cas où l'on aurait $S'' = S^\alpha S'^\beta$ (ou $S = S''$ dans le cas de 2 variables), le calcul de $Z_{\alpha, \beta}$ conduit en général à une impossibilité et il n'y a pas alors de solution holomorphe de l'équation fonctionnelle: exceptionnellement, il pourrait y avoir indétermination, le calcul formel donnerait une infinité de développements qu'il y aurait lieu d'étudier au point de vue de la convergence: la question analogue dans la théorie des points singuliers des équations différentielles a été étudiée par M. BENDIXON (*Stockholm Öfv.* 1894) et par M. HORN (*Journal für Mathem.* 1896).

3.° Enfin il y aurait lieu de traiter le cas où l'une au moins des quantités $|S|, |S'|$ est égale à 1: le cas où $|S|, |S'|, |S''|$ seraient tous les trois égaux à 1 présenterait sans doute un intérêt particulier, puisque c'est le seul cas où la substitution puisse être stable, d'après les résultats obtenus par M. LEVI CIVITA que j'ai cités dans l'introduction.

le point double. Si l'on a par exemple: $|S| < 1 < |S'| < |S''|$, cette surface est tangente au plan yOz .

Il y a deux autres développements susceptibles de représenter *formellement* deux surfaces tangentes respectivement aux deux plans xOy et xOz : mais la méthode précédente ne permet plus d'établir leur convergence.

On ne peut donc plus affirmer dans ce cas que la surface invariante obtenue soit la seule.

Dans ce cas, nous ramènerons la substitution à une forme canonique un peu moins simple que dans le cas précédent.

On peut tout d'abord amener la surface invariante à être le plan xOy , en procédant comme dans le cas précédent. La substitution prend la forme:

$$X = f(x, y, z) = f_0(x, y) + z f_1(x, y) + z^2 f_2(x, y) + \dots$$

$$Y = \varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y) + z \varphi_1(x, y) + z^2 \varphi_2(x, y) + \dots$$

$$Z = z^3 \psi(x, y, z).$$

Il y a trois courbes invariantes par cette substitution (§ 17). Deux de ces courbes sont situées sur la surface invariante, qui est actuellement le plan $z=0$: en effet, la substitution, lorsqu'on l'applique à un point du plan xOy , devient la substitution à deux variables:

$$X = f_0(x, y) \quad Y = \varphi_0(x, y).$$

Il y a deux courbes C, C' invariantes par cette substitution, une tangente à Ox et l'autre à Oy : ces deux courbes sont évidemment deux des trois courbes invariantes par la substitution à trois variables. Il y a de plus une courbe invariante C'' en dehors de la surface invariante. Nous allons amener ces trois courbes C, C', C'' à devenir les trois axes de coordonnées.

Soient:

$$z=0 \quad y = \psi_1(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \dots$$

$$z=0 \quad x = \psi_2(y) = \beta_1 y^2 + \beta_2 y^3 + \dots$$

les équations des courbes C, C' et:

$$y - \theta_1(z) = 0 \quad x - \theta_2(z) = 0$$

les équations de la courbe C'' qui est tangente à Oz .

Faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} u &= y - \theta_1(z) - \alpha_1 [x - \theta_2(z)]^2 - \alpha_2 [x - \theta_2(z)]^3 - \dots \\ v &= x - \theta_2(z) - \beta_1 [y - \theta_1(z)]^2 - \beta_2 [y - \theta_1(z)]^3 - \dots \\ w &= z \end{aligned}$$

le même changement étant effectué sur X, Y, Z qui sont remplacés par U, V, W (*).

A la courbe invariante $z = 0$ $y = \psi(z)$ correspond : $u = 0$ $w = 0$.

A la courbe invariante $z = 0$ $x = \psi_1(y)$ correspond : $v = 0$ $w = 0$.

A la courbe invariante : $y - \theta_1(z) = 0$ $x - \theta_2(z) = 0$ correspond : $u = 0$ $v = 0$.

Pour simplifier les notations, désignons encore par x, y, z, X, Y, Z les nouvelles variables, au lieu de les désigner par u, v, w, U, V, W . Les courbes invariantes devant être les axes de coordonnées et la surface invariante le plan xOy , la substitution prendra la forme :

$$\left. \begin{aligned} X &= x [S + F(x, y, z)] + y z f(x, y, z) \\ Y &= y [S' + \Phi(x, y, z)] + z x \varphi(x, y, z) \\ Z &= z [S'' + \Theta(x, y, z)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

F, Φ, Θ, f et φ sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine et les trois premières sont nulles à l'origine. Les termes du premier degré dans X, Y, Z sont $Sx, S'y, S''z$, car les racines de l'équation en S restent invariantes par toute transformation ponctuelle régulière à l'origine.

20. *Itération d'un point.* — Servons-nous des formes canoniques ainsi établies pour étudier la disposition des conséquents et des antécédents successifs d'un point pris dans le domaine du point double. Nous supposons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que les trois racines de l'équation en S sont distinctes, ont des modules différents de 0 et de 1 et qu'aucune des racines n'est égale au produit de deux puissances à exposants entiers positifs ou nuls des deux autres racines.

(*) Les formules du changement de variables permettent d'exprimer x, y, z par des fonctions holomorphes de u, v, w dans le domaine de l'origine, puisque le déterminant fonctionnel $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ a la valeur 1 pour $x = y = z = 0$.

Plusieurs cas peuvent se présenter et, dans ces divers cas, nous arriverons à des résultats qui présentent une analogie frappante avec les résultats obtenus par M.^r POINCARÉ dans l'étude des courbes définies par un système d'équations différentielles du premier ordre dans le voisinage d'un point singulier (*). La raison de cette analogie sera expliquée plus loin (Chap. III).

PREMIER CAS: *Les trois racines sont réelles et on a $|S| < |S'| < |S''| < 1$* . Il y a alors trois surfaces invariantes $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ et trois courbes invariantes C, C', C'' qui sont les intersections des trois surfaces deux à deux.

En se servant de la forme canonique (10), on verra, comme dans le cas de deux variables (§ 8), que les conséquents successifs d'un point suffisamment voisin du point double ont pour limite le point double et qu'en général ils tendent vers ce point tangentiellement à la courbe invariante C'' (correspondant à la racine S'' de plus grand module).

De plus, le plan déterminé par la tangente à C'' et par le n° conséquent à en général pour limite le plan tangent à la surface Σ (celle des trois surfaces qui contient C' et C''): en effet, en se servant de la forme canonique et en désignant par x_n, y_n, z_n les coordonnées du n° conséquent, on voit aisément que l'on a: $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < k^n \left| \frac{x}{y} \right|$, k étant un nombre fixe inférieur à 1 et que par suite $\frac{x_n}{y_n}$ tend vers zéro, c'est-à-dire que le plan déterminé par Oz et par le n° conséquent a pour limite le plan $y \text{ o } z$.

Certains de ces résultats tombent en défaut si le point initial est pris sur l'une des courbes invariantes ou sur l'une des surfaces invariantes: alors le n° conséquent a toujours pour limite le point double, mais il se déplace en restant sur la courbe ou sur la surface invariante à laquelle appartenait le point initial, de sorte que les autres résultats tombent en partie: par exemple, si le point initial est pris sur Σ , le n° conséquent tend vers le point double tangentiellement à C' et non plus à C'' .

DEUXIÈME CAS: *les trois racines sont réelles et on a: $|S| > |S'| > |S''| > 1$* . Dans ce cas, on obtient pour les antécédents successifs d'un point les résultats énoncés dans le cas précédent pour les conséquents: il suffit de remplacer la substitution par son inverse pour être ramené au cas précédent.

(*) POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. (4.^e partie, Journal de Liouville, 1886).

Les deux premiers cas sont les analogues du cas d'un *nœud*, dans la théorie de M.^r POINCARÉ (page 154 du mémoire cité plus haut).

TROISIÈME CAS: *les modules des trois racines sont inférieurs à 1, mais il y a deux racines imaginaires conjuguées et une racine réelle: $|S| = |S'| < 1$, $|S''| < 1$.*

Il y a dans ce cas une seule surface réelle invariante Σ'' et une seule courbe réelle invariante C'' qui est extérieure à Σ'' et qui est l'intersection des deux surfaces imaginaires conjuguées Σ, Σ' .

En procédant comme au § 9, on mettra la substitution sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} X + iY &= (x + iy) [|S| e^{i\alpha} + F(x, y, z) + i\Phi(x, y, z)] \\ X - iY &= (x - iy) [|S| e^{-i\alpha} + F(x, y, z) - i\Phi(x, y, z)] \\ Z &= z [S'' + \Theta(x, y, z)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

et on démontrera, comme dans le cas de deux variables, que les conséquents successifs tendent vers le point double.

De plus le plan déterminé par la tangente à la courbe C'' et par le n° conséquent tourne indéfiniment autour de cette tangente, sans avoir de limite (§ 10).

Quant à la droite qui joint le point double au n° conséquent, deux cas peuvent se présenter :

Supposons d'abord $|S| < |S''|$: désignons par ρ_n, ω_n, z_n les coordonnées semi-polaires du n° conséquent; on voit que $\frac{\rho_n}{z_n}$ tend en général vers 0 (il y a évidemment exception si le point initial est pris sur la surface $z = 0$ ou Σ''). La droite qui joint le point double au n° conséquent a donc pour limite la tangente à la courbe C'' (ou, sous la forme réduite, la droite Oz : $\rho = 0$).

Supposons au contraire $|S| > |S''|$: $\frac{\rho_n}{z_n}$ croît indéfiniment; la droite joignant l'origine au n° conséquent se rapproche indéfiniment de la surface $z = 0$ ou Σ'' , sans avoir d'ailleurs de position limite, puisque nous venons de voir que le plan déterminé par Oz et par cette droite n'avait pas de position limite (il y a évidemment exception si le point initial est pris sur la courbe C'' : $\rho = 0$).

Dans le cas où $|S|$ et $|S''|$ sont égaux, nous ne pouvons plus rien conclure pour la limite du rapport $\frac{\rho_n}{z_n}$.

QUATRIÈME CAS: *les modules des trois racines sont supérieurs à 1, mais*

il y a deux racines imaginaires conjuguées et une racine réelle : $|S| = |S'| > 1$ $|S''| > 1$.

On obtient pour les antécédents les résultats obtenus dans le troisième cas pour les conséquents.

Le troisième et le quatrième cas sont les analogues du cas d'un foyer, dans la théorie de M.^r POINCARÉ (loc. cit., pages 158-160).

CINQUIÈME CAS: les trois racines sont réelles, deux inférieures à 1 et une supérieure à 1, en valeur absolue : $|S| < |S'| < 1 < |S''|$.

Il y a une seule surface invariante Σ'' passant par le point double, elle contient deux courbes invariantes C , C' et il y a une troisième courbe invariante C'' en dehors de Σ'' .

Si un point est pris sur Σ'' , ses conséquents successifs restent sur Σ'' et ont pour limite le point double, la droite qui joint le point double au n^{e} conséquent ayant une position limite: on voit en effet, en se servant de la forme canonique (14) que pour un point de Σ'' , on retombe sur le 1.^{er} cas de l'itération à deux variables (§ 8).

Mais si un point est pris en dehors de Σ'' , ses conséquents successifs à partir d'un certain rang sont situés en dehors du domaine de définition de la substitution et on ne peut plus rien dire. Cela résulte de ce que l'on a: $|z_{n+1}| > k|z_n|$, k étant un nombre fixe supérieur à 1.

SIXIÈME CAS: les trois racines sont réelles et l'on a: $|S| > |S'| > 1 > |S''|$.

On obtient pour les antécédents les résultats obtenus dans le cinquième cas pour les conséquents.

Ce cinquième et ce sixième cas sont les analogues du cas d'un col dans la théorie de M.^r POINCARÉ (loc. cit., pages 155-158).

SEPTIÈME CAS: Deux racines imaginaires conjuguées de module inférieur à 1 et une racine réelle de module supérieur à 1: $|S| = |S'| < 1 < |S''|$.

— On arrive aux mêmes conclusions que dans le cinquième cas, sauf en ce qui concerne un point pris sur Σ'' : les conséquents d'un pareil point tendent vers le point double, mais la droite qui joint un conséquent au point double, au lieu d'avoir une position limite, tourne indéfiniment autour du point double.

HUITIÈME CAS. Deux racines imaginaires conjuguées de module supérieur à 1 et une racine réelle de module inférieur à 1: $|S| = |S'| > 1 > |S''|$.

On obtient pour les antécédents les résultats obtenus dans le septième cas pour les conséquents.

Le septième et le huitième cas correspondent au cas d'un col-foyer dans la théorie de M.^r POINCARÉ (loc. cit. page 160).

21. *Cas où la substitution a une infinité de points doubles formant une surface.* — Dans ce qui précède, nous avons considéré une substitution à trois variables dans le domaine d'un point double isolé. Il peut arriver que la substitution ait une infinité de points doubles formant une surface ou une courbe.

Supposons d'abord que la substitution admette une *surface* de points doubles. Je dis qu'en tout point de la surface, l'équation en S a une racine double égale à 1. En effet, prenons un point quelconque de la surface pour origine et le plan tangent comme plan des xy et soient:

$$X = ax + by + cz + \dots$$

$$Y = a'x + b'y + c'z + \dots$$

$$Z = a''x + b''y + c''z + \dots$$

les équations de la substitution; les coordonnées des points doubles vérifient les équations:

$$x = ax + by + cz + \dots$$

$$y = a'x + b'y + c'z + \dots$$

$$z = a''x + b''y + c''z + \dots$$

D'après l'hypothèse qu'il y a une surface de points doubles tangente au plan xOy en O , ces équations doivent subsister lorsqu'on donne à x et à y des accroissements arbitraires infiniment petits δx , δy et à z l'accroissement $\delta x = 0$. On a donc, quels que soient δx , δy :

$$\delta x = a \delta x + b \delta y \quad \delta y = a' \delta x + b' \delta y \quad 0 = a'' \delta x + b'' \delta y$$

d'où:

$$a = 1 \quad b = 0 \quad a' = 0 \quad b' = 1 \quad a'' = 0 \quad b'' = 0$$

et les équations de la substitution deviennent:

$$X = x + cz + \dots$$

$$Y = y + c'z + \dots$$

$$Z = S''z + \dots$$

En remplaçant x et y par $x + \frac{cz}{S''-1}$ et par $y + \frac{c'z}{S''-1}$ et en effectuant

le même changement de variables sur X, Y , ces équations prennent la forme :

$$\begin{aligned} X &= x + \dots \\ Y &= y + \dots \\ Z &= S'' z + \dots \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier. Sous cette forme, on voit immédiatement que deux des racines S, S' sont égales à 1 et nous supposons la troisième racine S'' différente de 1. Il est facile de chercher les courbes et les surfaces analytiques invariantes passant par l'origine. La surface des points doubles est une première surface invariante et toute courbe tracée sur cette surface est une courbe invariante. Toute autre courbe analytique invariante doit être tangente à Oz et comme la substitution (13) a la forme (3), nous pouvons appliquer à cette substitution la méthode des §§ 17 et 18, quoique l'équation en S ait actuellement une racine double: on voit qu'il existe une courbe invariante tangente à Oz , puisque $1 - S''^n$ n'est nul pour aucune valeur de n . On obtient donc les résultats suivants:

Lorsqu'une substitution à trois variables possède une infinité de points doubles formant une surface, par tout point de cette surface passe en général une courbe analytique invariante non située sur la surface. On voit qu'il y a en outre une infinité de courbes analytiques invariantes, ce sont toutes celles qu'on peut tracer sur la surface des points doubles; il y a aussi une infinité de surfaces analytiques invariantes obtenues en associant les courbes analytiques non situées sur la surface des points doubles, de façon à ce qu'elles forment des surfaces analytiques. Les points doubles pour lesquels la racine S'' serait aussi égale à 1 sont des points exceptionnels dans le domaine desquels les résultats précédents ne s'appliquent plus.

22. *Cas où la substitution a une infinité de points doubles formant une courbe.* — En tout point de la courbe des points doubles, l'équation en S a une racine égale à 1. En effet, si on prend ce point comme origine et la tangente à la courbe double pour axe des z on doit avoir, en conservant les notations du paragraphe précédent :

$$c \delta z = 0 \quad c' \delta z = 0 \quad \delta z = c'' \delta z$$

quel que soit δz , d'où :

$$c = 0 \quad c' = 0 \quad c'' = 1$$

et la substitution prend la forme :

$$\begin{aligned} X &= a x + b y + \dots \\ Y &= a' x + b' y + \dots \\ Z &= a'' x + b'' y + z + \dots \end{aligned}$$

L'équation en S a une racine égale à 1. Si on suppose les deux autres racines distinctes et différentes de 1, on peut, par un changement de variables linéaire, ramener la substitution à la forme :

$$\begin{aligned} X &= S x + \dots \\ Y &= S' y + \dots \\ Z &= z + \dots \end{aligned}$$

Il résulte alors du § 17 que *par tout point de la courbe C des points doubles passent en général deux courbes analytiques C' , C'' invariantes par la substitution*: il ne peut y avoir exception qu'en un point où les racines S et S' seraient égales à zero ou à ± 1 ou en un point où S et S' seraient confondues.

Quant aux surfaces invariantes, il en passe d'abord deux par tout point O de la courbe C des points doubles: ce sont les surfaces engendrées par C' , C'' lorsque O se déplace sur la courbe C : il résulte en outre du § 18 qu'il passe une troisième surface invariante par O , si $|S|$, $|S'|$ sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1. Ainsi:

Par tout point de la courbe des points doubles passent deux ou trois surfaces invariantes par la substitution.

L'étude de l'itération d'un point pris dans le voisinage de la courbe des points doubles est facile: elle se fait comme dans le cas de deux variables (§ 11). Soit AB un arc de la courbe des points doubles le long duquel $|S|$ et $|S'|$ sont inférieurs à 1: on peut définir un domaine entourant AB et tel que les conséquents successifs de tout point de ce domaine tendent vers un point O de l'arc AB en restant sur une surface analytique invariante: ces conséquents tendent vers O suivant une direction déterminée, si $|S|$ et $|S'|$ sont réels et tournent au contraire indéfiniment autour de O si $|S|$ et $|S'|$ sont imaginaires. Si $|S|$ et $|S'|$ sont supérieurs à 1 le long de l'arc AB , les résultats précédents s'appliquent aux antécédents. Enfin

si $|S|$ et $|S'|$ comprennent 1, les conséquents et les antécédents, à partir d'un certain rang, sortent du domaine et on ne peut plus rien dire.

L'étude de l'itération dans le voisinage d'une surface de points doubles est immédiate et nous ne nous y arrêtons pas.

Ces résultats présentent encore une analogie frappante avec les résultats établis par M.^r POINCARÉ dans l'étude des courbes singulières d'un système de deux équations différentielles du premier ordre à trois variables (loc. cit. pages 162-167).

23. *Points limites oscillants ou à convergence irrégulière.* — Les résultats énoncés dans le cas de deux variables (Chap. I § 15) s'étendent immédiatement au cas de trois variables: on généralise la notion de point double d'une substitution en introduisant des cycles de p points permutablement circulairement par la substitution: par ces points passent en général trois cycles de p courbes et, suivant les cas, trois cycles ou un cycle de p surfaces se permutant circulairement par la substitution.

La traduction analytique de ces résultats au point de vue des équations fonctionnelles n'offre aucune difficulté et nous ne nous arrêtons pas plus longtemps sur ce cas de la convergence irrégulière.

CHAPITRE III.

L'ÉQUATION DE SCHRÖDER. — ANALOGIES ENTRE LA THÉORIE DE L'ITÉRATION ET LA THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

24. *Détermination des courbes et des surfaces invariantes à l'aide de l'équation de Schröder.* — Nous avons déterminé les courbes et les surfaces analytiques invariantes par une substitution à deux ou à trois variables et passant par un point double de la substitution. Cette recherche peut se rattacher à l'étude des équations d'ABEL et de SCHRÖDER relatives à la substitution.

Soit par exemple une substitution à trois variables

$$X = f(x, y, z) \quad Y = \varphi(x, y, z) \quad Z = \theta(x, y, z). \quad (1)$$

L'équation de SCHRÖDER relative à cette substitution est l'équation fonc-

tionnelle suivante :

$$\psi[f(x, y, z), \varphi(x, y, z), \theta(x, y, z)] = k\psi(x, y, z) \quad (2)$$

où ψ désigne la fonction inconnue et k une constante.

L'équation d'ABEL se déduit de l'équation (2) en posant :

$$\psi_1(x, y, z) = \log \psi(x, y, z)$$

ce qui donne :

$$\psi_1[f(x, y, z), \varphi(x, y, z), \theta(x, y, z)] = \psi_1(x, y, z) + \log k.$$

Dans le cas d'une variable, l'équation (2) devient :

$$\psi[f(x)] = k\psi(x).$$

Elle a été étudiée dans le voisinage d'un point racine x_0 de l'équation $f(x) = x$ par M.^r KÖNIGS, dans le cas général où $|f'(x_0)|$ est différent de 1 et de 0, par M.^r GRÉVY et M.^r LEAU dans ces deux derniers cas (*).

Dans le cas de n variables, les équations d'ABEL et de SCHRÖDER ont été étudiées par M.^r LEAU. Considérons l'équation en S relative à un point double de la substitution, supposons que les racines $S_1, S_2, \dots, S_n$ de cette équation soient distinctes, toutes inférieures ou toutes supérieures en module à 1, et qu'aucune des racines ne soit égale à un produit de puissances entières des autres racines. M.^r LEAU démontre que l'équation de SCHRÖDER admet alors n solutions holomorphes dans le domaine du point double et telles que les dérivées premières ne sont pas toutes nulles au point double; pour ces n solutions, la constante k a respectivement les valeurs $S_1, S_2, \dots, S_n$ (**).

Ce résultat permet de définir les courbes et les surfaces analytiques invariantes passant par un point double. Soit par exemple la substitution (1).

(*) KÖNIGS, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bulet. des Sciences Mathématiques, 1883). — *Recherches sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole Normale, 1884).

GRÉVY, *Sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole Normale, 1884).

LEAU, *Etude sur les équations fonctionnelles* (Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, 1897). On trouvera dans ce dernier mémoire l'indication des travaux antérieurs faits à ce sujet par plusieurs autres géomètres.

(**) M.^r LEAU traite aussi le cas où les racines ne sont pas distinctes et le cas où certaines des racines sont des produits de puissances entières des autres racines: mais nous laisserons ces cas de côté comme nous l'avons fait dans les chap. I et II.

D'après le théorème de M.^r LEAU, il existe trois fonctions holomorphes ψ_1, ψ_2, ψ_3 , vérifiant les équations déduites de l'équation (2) en donnant respectivement à k les valeurs S_1, S_2, S_3 . Il est évident, d'après ces équations (2), que les équations:

$$\psi_1(x, y, z) = 0 \quad \psi_2(x, y, z) = 0 \quad \psi_3(x, y, z) = 0$$

définissent trois surfaces invariantes par la substitution (2) et passant par le point double et comme les dérivées partielles du premier ordre de ψ_1, ψ_2, ψ_3 ne sont pas toutes nulles au point double, ces équations définissent l'une des coordonnées en fonction implicite des deux autres dans le domaine du point double.

Ainsi, en égalant à zéro les trois solutions holomorphes de l'équation de SCHRÖDER, on détermine, sous forme implicite, les trois surfaces analytiques invariantes par la substitution (1) et passant par le point double. Les trois courbes invariantes sont les intersections de ces surfaces deux à deux.

Mais la méthode précédente ne s'applique pas au cas où les modules des racines sont les uns inférieurs et les autres supérieurs à 1: dans les deux chapitres précédents, nous avons pu définir, dans ce cas aussi, des courbes et des surfaces invariantes.

25. Démonstration de l'existence des solutions de l'équation de SCHRÖDER.

— M.^r LEAU a démontré les résultats énoncés au paragraphe précédent en considérant l'équation de SCHRÖDER comme un cas particulier d'équations fonctionnelles plus générales qu'il a étudiées dans le travail cité plus haut. Mais on peut obtenir les solutions de cette équation par la méthode même qui a servi à M.^r KÖNIGS dans le cas d'une variable, en employant les formes canoniques de la substitution que nous avons données aux §§ 7 et 19. Nous allons étendre ainsi la méthode de M.^r KÖNIGS au cas de plusieurs variables.

Rappelons d'abord la méthode employée par M.^r KÖNIGS dans le cas d'une variable (*), en modifiant légèrement les notations. Etant donnée la substitution à une variable:

$$X = f(x) = Sx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots$$

désignons par x_n le n^{e} conséquent du point x : M.^r KÖNIGS démontre que

(*) *Bullet. des Sciences Mathématiques*, 1883, pages 345, 346. — *Annales de l'Ecole Normale*, 1884.

l'expression $\frac{x_n}{S^{1/n}}$, en supposant $|S| < 1$, a une limite pour n infini et que cette limite est une fonction $\psi(x)$ holomorphe dans le domaine de l'origine et vérifiant l'équation:

$$\psi[f(x)] = S \psi(x).$$

En outre:

$$\psi'(0) = 1.$$

Considérons de même une substitution, à trois variables par exemple, supposons que les racines de l'équation en S soient inférieures en module à 1 (*) et qu'aucune des racines ne soit le produit de deux puissances à exposants entiers des deux autres racines: on a vu (§ 19) qu'on pouvait ramener la substitution à la forme:

$$X = S_1 x [1 + F(x, y, z)] \quad Y = S_2 y [1 + \Phi(x, y, z)]$$

$$Z = S_3 z [1 + \Theta(x, y, z)]$$

F, Φ, Θ étant trois fonctions de x, y, z holomorphes et nulles à l'origine. Si l'on désigne par x_n, y_n, z_n les coordonnées du n^e conséquent du point x, y, z , on a:

$$x_n = S_1^n x [1 + F(x, y, z)] [1 + F(x_1, y_1, z_1)] \dots \\ \dots [1 + F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})].$$

Nous allons prouver que $\frac{x_n}{S_1^n}$ a une limite pour n infini: cela revient à établir la convergence du produit infini dont le terme général est

$$1 + F(x_n, y_n, z_n)$$

ou de la série dont le terme général est $|F(x_n, y_n, z_n)|$. On peut trouver deux nombres positifs M et β tels que l'on ait, dans un domaine suffisamment restreint autour de l'origine:

$$|F(x, y, z)| < \frac{M\beta[|x| + |y| + |z|]}{1 - \beta[|x| + |y| + |z|]}.$$

(*) Le cas où les racines seraient supérieures en module à 1 se ramène à celui-ci en remplaçant la substitution donnée par son inverse.

On est donc ramené à démontrer la convergence de la série dont le terme général est :

$$u_n = \frac{M \beta [|x_n| + |y_n| + |z_n|]}{1 - \beta [|x_n| + |y_n| + |z_n|]}.$$

Supposons d'abord que le point initial n'appartienne pas au plan $z=0$: alors z_n n'est pas nul et on a vu (§ 20, 1.^{er} cas) que le n^e conséquent d'un point n'appartenant pas à la surface invariante $z=0$ tendait vers l'origine tangentiellement à l'intersection Oz des deux autres surfaces: $\frac{y_n}{z_n}$ et $\frac{x_n}{z_n}$ ont donc pour limite zéro; il en résulte que le rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \times \frac{\left| \frac{x_{n+1}}{z_{n+1}} \right| + \left| \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} \right| + 1}{\left| \frac{x_n}{z_n} \right| + \left| \frac{y_n}{z_n} \right| + 1} \times \frac{1 - \beta [|x_n| + |y_n| + |z_n|]}{1 - \beta [|x_{n+1}| + |y_{n+1}| + |z_{n+1}|]}.$$

a la même limite que le rapport $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$, c'est-à-dire $|S_3|$ qui est inférieur à 1: la série est donc convergente.

Si le point initial appartient à la surface $z=0$, on a $z_n=0$ quel que soit n et le terme général devient:

$$u_n = \frac{M \beta [|x_n| + |y_n|]}{1 - \beta [|x_n| + |y_n|]}.$$

On démontrera comme précédemment que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a même limite que $\left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right|$: cette limite est $|S_2|$ qui est inférieur à 1 et la série est convergente. Il y a encore exception si le point initial est pris sur la courbe $y=z=0$. Le terme général devient:

$$u_n = \frac{M \beta |x_n|}{1 - \beta |x_n|}.$$

et le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite $|S_1|$.

Ainsi, dans tous les cas, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite qui est $|S_3|$, $|S_2|$ ou $|S_1|$: cette limite étant inférieure à 1 dans les trois cas, le produit infini est absolument convergent. Il en résulte que $\frac{x_n}{S_1^n}$ a une limite que nous désignerons par $\psi(x, y, z)$ et qui possède les propriétés suivantes:

La limite $\psi(x, y, z)$ de $\frac{x_n}{S_1^n}$ est une fonction holomorphe dans un certain domaine autour de l'origine, elle est nulle sur la surface invariante $x=0$, ses dérivées partielles ψ'_y, ψ'_z sont nulles à l'origine, tandis que ψ'_x est différent de zéro et enfin elle vérifie l'équation de SCHREDER:

$$\Psi[S_1 x(1+F(x, y, z)), S_2 y(1+\Phi(x, y, z)), S_3 z(1+\Theta(x, y, z))] = S_1 \psi(x, y, z).$$

Nous nous bornerons à démontrer ce dernier point, les démonstrations de ces propositions étant les généralisations immédiates de celles que M.^r Kœnigs a données dans le cas d'une variable (*). Posons:

$$\frac{x_n}{S_1^n} = f_n(x, y, z).$$

La fonction $f_n(x, y, z)$ a pour limite $\psi(x, y, z)$. On a:

$$f_{n+1}(x, y, z) = \frac{x_{n+1}}{S_1^{n+1}} = \frac{1}{S_1} f_n[S_1 x(1+F), S_2 y(1+\Phi), S_3 z(1+\Theta)]$$

et d'autre part:

$$f_{n+1}(x, y, z) = \frac{1}{S_1^{n+1}} \times S_1 x_n [1+F(x_n, y_n, z_n)] = f_n(x, y, z) [1+F(x_n, y_n, z_n)]$$

d'où l'identité:

$$\frac{1}{S_1} f_n[S_1 x(1+F), S_2 y(1+\Phi), S_3 z(1+\Theta)] = f_n(x, y, z) [1+F(x_n, y_n, z_n)].$$

Lorsque n croît indéfiniment, on obtient en égalant les limites des deux membres:

$$\psi[S_1 x(1+F), S_2 y(1+\Phi), S_3 z(1+\Theta)] = S_1 \psi(x, y, z).$$

La proposition est donc démontrée.

On démontrerait de même que $\frac{y_n}{S_2^n}$ et $\frac{z_n}{S_3^n}$ ont des limites qui sont des fonctions holomorphes vérifiant l'équation fonctionnelle (2) dans laquelle on donne à k les valeurs S_2, S_3 .

(*) *Annales de l'Ecole Normale*, 1884 (§§ III, IV, VI).

26. *Nouvelles formes canoniques d'une substitution dans le cas où les racines de l'équation en S sont toutes inférieures ou toutes supérieures en valeur absolue à l'unité.* — Continuons à raisonner dans le cas de trois variables. Si on suppose $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$ inférieurs (ou supérieurs) tous les trois à 1 et si aucune des racines n'est égale au produit de deux puissances entières des autres racines, on peut mettre la substitution sous la forme canonique vue au § 19:

$$X = x[S_1 + F(x, y, z)] \quad Y = y[S_2 + \Phi(x, y, z)] \quad Z = z[S_3 + \Theta(x, y, z)].$$

On peut, en se servant des solutions de l'équation de SCHREDER trouvées au paragraphe précédent, donner une forme encore plus simple à la substitution, forme signalée par M. LEAU dans le travail déjà cité (*).

Nous avons démontré l'existence de trois fonctions holomorphes $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$ vérifiant trois équations de la forme:

$$\psi[x(S_1 + F(x, y, z)), y(S_2 + \Phi(x, y, z)), z(S_3 + \Theta(x, y, z))] = k\psi(x, y, z)$$

où la constante k a respectivement les valeurs S_1 , S_2 , S_3 . Posons:

$$\psi_1(x, y, z) = u \quad \psi_2(x, y, z) = v \quad \psi_3(x, y, z) = w$$

et pareillement:

$$\psi_1(X, Y, Z) = U \quad \psi_2(X, Y, Z) = V \quad \psi_3(X, Y, Z) = W.$$

Ces équations définissent x, y, z en fonction holomorphe de u, v, w dans le domaine de l'origine, car le déterminant fonctionnel $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ n'est pas nul à l'origine, à cause des valeurs trouvées au paragraphe précédent pour les dérivées partielles des fonctions ψ . Si on effectue le changement de variables ainsi défini, la substitution prend la forme:

$$U = S_1 u \quad V = S_2 v \quad W = S_3 w.$$

Telle est la forme canonique de la substitution signalée par M. LEAU.

27. *Équation générale des courbes invariantes par une substitution à deux ou à trois variables.* Le résultat que nous venons d'énoncer nous permet de trouver aisément la forme générale des équations d'une courbe, analytique ou non, invariante par une substitution à deux ou à trois va-

(*) LEAU, *loc. cit.* Chap. IV, § 1.

riables, dans le cas où la forme canonique que nous venons de trouver est valable.

Soit d'abord une substitution à deux variables, $\psi_1(x, y)$ et $\psi_2(x, y)$ les deux solutions de l'équation de SCHREDER. Si nous posons:

$$\psi_1(x, y) = u \quad \psi_2(x, y) = v$$

le problème se ramène à la recherche des courbes invariantes par la substitution:

$$U = S_1 u \quad V = S_2 v$$

problème traité comme exemple au § 13.

L'équation générale d'une courbe invariante est:

$$v = u^{\frac{\log S_2}{\log S_1}} \times \omega_{\log S_1}(\log u)$$

$\omega_{\log S_1}(u)$ désignant une fonction périodique arbitraire, de période $\log S_1$. On voit aisément qu'on peut donner aussi à cette équation la forme plus symétrique:

$$v^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log v) = u^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log u)$$

en désignant en général par $\omega_a(x)$ une fonction arbitraire de x admettant la période a .

Si on revient aux variables x et y , on voit que l'équation générale des courbes invariantes par une substitution à deux variables est, dans le cas où $|S_1|$, $|S_2|$ sont inférieurs (ou supérieurs) à 1 et où aucune des racines n'est une puissance entière de l'autre racine:

$$[\psi_1(x, y)]^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log \psi_1) = [\psi_2(x, y)]^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log \psi_2)$$

où ψ_1 et ψ_2 désignent deux fonctions holomorphes fixes et $\omega_a(x)$ une fonction arbitraire de période a .

Dans le cas de trois variables, on trouve un résultat analogue. Le problème du § 13 se traite, pour trois variables, comme pour deux et les courbes invariantes ont pour équations générales:

$$\begin{aligned} [\psi_1(x, y, z)]^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log \psi_1) &= [\psi_2(x, y, z)]^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log \psi_2) = \\ &= [\psi_3(x, y, z)]^{\frac{1}{\log S_3}} \omega_{\log S_3}(\log \psi_3). \end{aligned}$$

La méthode ne s'applique pas au cas où les racines sont les unes inférieures, les autres supérieures à 1.

28. *Analogies entre la théorie de l'itération et la théorie des courbes définies par une équation différentielle dans le domaine d'un point singulier.* — L'étude des équations différentielles du premier ordre dans le domaine d'un point singulier conduit à des résultats qui présentent une analogie évidente avec les résultats que nous avons obtenus dans la théorie de l'itération à deux et à trois variables: c'est ainsi que dans l'étude de l'itération d'un point, dans le cas de trois variables (§ 20), nous avons été amenés à distinguer plusieurs cas qui correspondent aux divers cas envisagés par M.^r POINCARÉ dans l'étude des trajectoires d'un système d'équations différentielles du premier ordre à trois variables (*); la forme des équations générales d'une courbe invariante par une substitution trouvée au paragraphe précédent se rapproche également de la forme des équations d'une trajectoire dans le cas d'un *nœud*. Nous allons voir la raison de cette liaison entre les deux questions et montrer que le cas des équations différentielles se présente comme un cas limite de la théorie de l'itération et des équations fonctionnelles qui se rattachent à cette théorie: nous retrouverons ainsi plusieurs résultats de la théorie des équations différentielles.

Nous raisonnerons d'abord dans le cas de deux variables.

Considérons la substitution:

$$\left. \begin{aligned} X &= x + f(x, y) \delta t \\ Y &= y + \varphi(x, y) \delta t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

où δt désigne un paramètre que nous ferons tendre ensuite vers zéro.

Les points doubles de cette substitution sont donnés par les équations:

$$f(x, y) = 0 \quad \varphi(x, y) = 0.$$

En supposant le point double à l'origine, f et φ ont la forme:

$$f(x, y) = a x + b y + \dots \quad \varphi(x, y) = a' x + b' y + \dots$$

(*) POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, (4.^e partie, Journal de Liouville, 1886).

Pour l'étude des points singuliers des équations différentielles, voir aussi:

PICARD, *Traité d'Analyse*. Tome III (*Chap. I et II* et surtout le *Chap. IX*, relatif aux points singuliers des intégrales réelles, qui contient les principaux résultats établis par M.^r POINCARÉ dans le cas de deux variables, en particulier la définition des nœuds, des cols et des foyers).

Supposons les racines λ_1, λ_2 , de l'équation:

$$\lambda^2 - (a + b')\lambda + a'b' - b a' = 0$$

distinctes. On pourra, par un changement de variable linéaire, ramener f et φ à la forme:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lambda_1 x + \dots \\ \varphi(x, y) &= \lambda_2 y + \dots \end{aligned}$$

et la substitution (3) devient:

$$\begin{aligned} X &= x + (\lambda_1 x + \dots) \delta t \\ Y &= y + (\lambda_2 y + \dots) \delta t. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation en S relative à cette substitution sont:

$$S_1 = 1 + \lambda_1 \delta t \quad S_2 = 1 + \lambda_2 \delta t. \quad (4)$$

Soit $y = \psi(x)$ une courbe analytique invariante par la substitution. La fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\psi[x + f(x, y) \delta t] = y + \varphi(x, y) \delta t \quad (5)$$

dans laquelle on doit supposer y remplacé par $\psi(x)$. En développant les deux membres par rapport aux puissances de δt , elle devient:

$$\psi'(x) f(x, y) \delta t + \dots = \varphi(x, y) \delta t + \dots$$

d'où en divisant les deux membres par δt , en faisant tendre δt vers zéro et en remplaçant $\psi'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{\varphi(x, y)}. \quad (6)$$

Ainsi:

L'équation fonctionnelle qui définit une courbe invariante par (3) devient à la limite l'équation différentielle (6); les courbes invariantes par (5) deviennent les courbes définies par cette équation différentielle; les points doubles de la substitution (3) deviennent les points singuliers de l'équation différentielle.

Pour obtenir une courbe invariante par une substitution, il suffit, comme on l'a vu (§§ 1 et 14 bis), de considérer un point P_0 et ses conséquents

$P_1, P_2, \dots$ ainsi que ses antécédents $P_{-1}, P_{-2}, \dots$, de joindre $P_0 P_1$ par un arc de courbe: les arcs transformés de $P_0 P_1$ par la substitution donnée ou par son inverse sont des arcs $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots$ et $P_0 P_{-1}, P_{-1} P_{-2}, \dots$ qui par leur ensemble constituent une courbe invariante. Lorsque, dans la substitution (3), on fait tendre δt vers 0, un point se rapproche indéfiniment de son conséquent et, à la limite, les antécédents et les conséquents successifs de $P_0 P_1$ constituent une courbe intégrale de l'équation différentielle (6). Il en résulte que, dans le voisinage d'un point singulier, les courbes intégrales présenteront plusieurs dispositions différentes suivant les diverses dispositions qui se présentent dans l'itération d'un point pour les conséquents et les antécédents successifs (§§ 8 et 9).

Dans l'étude de l'itération d'un point, on a supposé $S_1 = S_2$, ce qui, d'après les valeurs (4) de S_1 et de S_2 , conduit à supposer $\lambda_1 = \lambda_2$; de plus, aucune des racines n'était une puissance entière de l'autre: or, l'égalité: $1 + \lambda_1 \delta t = (1 + \lambda_2 \delta t)^n$ devient à la limite: $\lambda_1 = n \lambda_2$ et on est conduit à supposer que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ n'est ni un entier positif, ni l'inverse d'un entier positif: c'est bien là une hypothèse qu'on est conduit à faire dans la théorie des points singuliers (Voir PICARD, *Analyse* Tome III, Chap. IX, § 3).

Ces hypothèses faites, la discussion des §§ 8 et 9 conduit à distinguer trois cas:

1. λ_1 et λ_2 réels et de même signe. D'après les valeurs (4) de S_1 et de S_2 , ces dernières quantités sont alors toutes deux supérieures ou toutes deux inférieures à 1: on est donc dans le premier ou dans le deuxième cas du § 8 et les conséquents ou les antécédents successifs d'un point tendent vers l'origine: il en résulte que toute courbe intégrale suffisamment voisine de l'origine passe par ce point: l'origine est un nœud (PICARD, Chapitre IX, § 3).

2. λ_1 et λ_2 réels et de signes contraires. S_1 et S_2 sont alors l'un supérieur et l'autre inférieur à 1; dans ce cas (§ 8, 3^e cas), il y a deux courbes C et C' telles que les conséquents successifs d'un point de C ou les antécédents successifs d'un point de C' tendent vers l'origine, mais si le point initial est pris hors de C ou de C' les conséquents et les antécédents successifs à partir d'un certain rang sortent du domaine de l'origine. A la limite, on voit que l'équation différentielle (6) admet deux intégrales réelles et deux seulement passant par le point singulier: c'est le cas du col (PICARD Chapitre IX, § 4).

3. λ_1 et λ_2 imaginaires conjugués. Les racines S_1 et S_2 sont alors imaginaires conjuguées: les antécédents ou les conséquents successifs tournent autour de l'origine à la façon de points distribués sur une spirale logarithmique (§ 9). A la limite, toute courbe intégrale se rapprochant suffisamment de l'origine admet ce point comme point asymptote: on retrouve le cas d'un foyer (PICARD, Chap. IX, § 5).

Revenons au premier cas (λ_1 et λ_2 réels et de même signe): les racines S_1 et S_2 étant toutes deux inférieures ou toutes deux supérieures à 1, les courbes analytiques invariantes par la substitution (3) et passant par l'origine peuvent être déterminées, soit par l'équation fonctionnelle (5), soit sous forme implicite à l'aide de l'équation de SCHREDER (§ 24). Voyons quels résultats nous fournit à la limite cette dernière équation: elle a actuellement la forme:

$$\psi[x + (\lambda_1 x + \dots) \delta t, y + (\lambda_2 y + \dots) \delta t] = K \psi(x, y) \quad (7)$$

ou

$$\psi(x, y) + \frac{\partial \psi}{\partial x} (\lambda_1 x + \dots) \delta t + \frac{\partial \psi}{\partial y} (\lambda_2 y + \dots) \delta t + \dots = K \psi(x, y).$$

Posons:

$$K = 1 + \rho \delta t.$$

L'équation devient:

$$(\lambda_1 x + \dots) \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta t + (\lambda_2 y + \dots) \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta t + \dots = \rho \psi(x, y) \delta t.$$

En divisant les deux membres par δt et en faisant tendre δt vers zéro, on obtient:

$$(\lambda_1 x + \dots) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\lambda_2 y + \dots) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \psi(x, y). \quad (8)$$

C'est une équation aux dérivées partielles qui joue un rôle important dans la théorie des points singuliers (Voir PICARD, *Analyse III*, Chap. I, § 3).

L'équation de SCHREDER (7) a, comme on l'a vu au § 26, deux solutions holomorphes $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ pour lesquelles la constante K a respectivement les valeurs $S_1 = 1 + \lambda_1 \delta t$, $S_2 = 1 + \lambda_2 \delta t$. A la limite, l'équation (8) a deux solutions holomorphes obtenues en prenant pour ρ les valeurs λ_1 , λ_2 : ce sont bien les conclusions auxquelles on arrive dans la théorie des points singuliers (PICARD, Chap. I, §§ 3 et 7; Chap. II, § 1).

Ainsi, l'équation fonctionnelle (5) et l'équation de SCHREDER (7) jouent l'une par rapport à l'autre le même rôle que l'équation différentielle (6) et l'équation aux dérivées partielles (8) l'une par rapport à l'autre.

Enfin, nous avons établi au § 27 la forme générale de l'équation des courbes invariantes par la substitution. Cette équation est:

$$[\psi_1(x, y)]^{\frac{1}{\log S_1}} \omega_{\log S_1}(\log \psi_1) = [\psi_2(x, y)]^{\frac{1}{\log S_2}} \omega_{\log S_2}(\log \psi_2)$$

$\omega_{\log S_1}(x)$ et $\omega_{\log S_2}(x)$ désignant deux fonctions arbitraires de périodes respectives $\log S_1$ et $\log S_2$: ces fonctions deviennent, lorsque δt tend vers zéro, des fonctions de période zéro, c'est-à-dire des constantes et l'équation précédente devient

$$A [\psi_1(x, y)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_1\delta t)}} = A_2 [\psi_2(x, y)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_2\delta t)}}$$

et on en déduit, en élevant les deux membres à la puissance δt et en faisant tendre δt vers zéro :

$$A [\psi_1(x, y)]^{\lambda_1} = A_2 [\psi_2(x, y)]^{\lambda_2}.$$

On retrouve la forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle (6), dans le cas d'un *nœud*, qui résulte d'un théorème général dû à M.^r POINCARÉ (Voir PICARD, Ch. I, § 7 et Ch. IX, § 3).

29. Les mêmes analogies entre la théorie des points singuliers des équations différentielles et la théorie de l'itération se présentent dans le cas de trois variables. Considérons la substitution:

$$\left. \begin{aligned} X &= x + (\lambda_1 x + \dots) \delta t \\ Y &= y + (\lambda_2 y + \dots) \delta t \\ Z &= z + (\lambda_3 z + \dots) \delta t. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Soient $y = \psi(x)$ $z = \chi(x)$ les équations d'une courbe invariante par cette substitution. Les fonctions ψ et χ vérifient le système d'équations fonctionnelles:

$$\begin{aligned} \psi[x + (\lambda_1 x + \dots) \delta t] &= y + (\lambda_2 y + \dots) \delta t \\ \chi[x + (\lambda_1 x + \dots) \delta t] &= z + (\lambda_3 z + \dots) \delta t \end{aligned}$$

dans lesquelles y et z sont mis pour abréger à la place de $\psi(x)$ et de $\chi(x)$. Lorsque δt tend vers zéro, ces équations deviennent, comme dans le cas de deux variables:

$$\begin{aligned} \psi'(x) \times [\lambda_1 x + \dots] &= \lambda_2 y + \dots \\ \chi'(x) \times [\lambda_1 x + \dots] &= \lambda_3 z + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dx}{\lambda_1 x + \dots} = \frac{dy}{\lambda_2 y + \dots} = \frac{dz}{\lambda_3 z + \dots} \quad (10)$$

Les courbes invariantes par la substitution (9), qui admet l'origine pour point double, deviennent donc les intégrales du système (10) qui a un point singulier à l'origine.

Soit de même: $z = \psi(x, y)$ l'équation d'une surface invariante par la substitution (9): la fonction ψ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$\psi[x + (\lambda_1 x + \dots) \delta t, y + (\lambda_2 y + \dots) \delta t] = \lambda_3 \psi + \dots$$

qui devient à la limite:

$$(\lambda_1 x + \dots) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\lambda_2 y + \dots) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \lambda_3 \psi + \dots \quad (11)$$

C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par les courbes intégrales du système (10): les intégrales de cette équation (11) se présentent donc comme limites des surfaces invariantes par la substitution (9).

La discussion du § 20 relative à l'itération d'un point par une substitution à trois variables conduirait à distinguer les quatre espèces de points singuliers envisagées par M.^r POINCARÉ dans l'étude des intégrales du système (10), les *nœuds*, les *cols*, les *foyers* et les *cols-foyers*. Nous renverrons pour cette étude au mémoire de M.^r POINCARÉ « *Sur les courbes définies par une équation différentielle* » (Journ. de Liouville 1889); on verra aisément comment les résultats qui y sont établis résulteraient de l'étude de l'itération d'un point, comme dans le cas de deux variables.

Bornons-nous à indiquer comment on peut déduire de la théorie de l'itération la forme des équations d'une courbe intégrale dans le cas d'un *nœud*: ce cas est celui où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont positifs et par suite $S_1 = 1 + \lambda_1 \delta t$, $S_2 = 1 + \lambda_2 \delta t$, $S_3 = 1 + \lambda_3 \delta t$ tous les trois supérieurs ou tous les trois inférieurs à 1. On a vu au § 27 que les équations générales d'une courbe invariante sont:

$$\begin{aligned} [\psi_1(x, y, z)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_1 \delta t)}} \times \omega_{\log S_1}(\log \psi_1) &= [\psi_2(x, y, z)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_2 \delta t)}} \times \omega_{\log S_2}(\log \psi_2) = \\ &= [\psi_3(x, y, z)]^{\frac{1}{\log(1+\lambda_3 \delta t)}} \times \omega_{\log S_3}(\log \psi_3). \end{aligned}$$

Lorsque δt tend vers zéro, les fonctions ω deviennent des constantes A_1 , A_2 , A_3 et, en multipliant les trois membres par δt et faisant tendre δt vers zéro, on obtient la forme générale suivante des équations :

$$A_1 [\psi_1(x, y, z)]^{\lambda_1} = A_2 [\psi_2(x, y, z)]^{\lambda_2} = A_3 [\psi_3(x, y, z)]^{\lambda_3}$$

ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 désignant trois fonctions holomorphes et A_1 , A_2 , A_3 des constantes arbitraires. Ce sont, aux notations près, les équations générales données par M.^r POINCARÉ pour les courbes intégrales du système (10) (*).

Le cas où la substitution (9) aurait une infinité de points doubles formant une courbe conduit à la limite au cas où le système (10) aurait une *courbe singulière* : les résultats du § 22 nous donneraient ainsi les résultats établis par M.^r POINCARÉ, pour le cas d'une courbe singulière, dans le mémoire déjà cité plusieurs fois (**).

(*) POINCARÉ, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* (Thèse, Paris, 1879, page 70).

(**) *Journal de Liouville*, 1886 (pages 162-165).

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE IV.

LES COURBES INVARIANTES PAR UNE SUBSTITUTION $(X, Y; x, y, y')$.

1. Considérons une substitution de la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} X &= f(x, y, y') \\ Y &= \varphi(x, y, y') \end{aligned} \right\} \left(y' = \frac{dy}{dx} \right) \quad (1)$$

où f et φ désignent des fonctions continues de x, y, y' . Nous appellerons une pareille substitution une substitution $(X, Y; x, y, y')$.

Si une fonction $y = \psi(x)$ reste invariante par cette substitution, elle vérifie une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue intervient par elle-même et par sa dérivée. On a en effet, dans cette hypothèse:

$$\begin{aligned} X &= f[x, \psi(x), \psi'(x)] \\ \psi(x) &= \varphi[x, \psi(x), \psi'(x)] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x, \psi(x), \psi'(x))] = \varphi[x, \psi(x), \psi'(x)]. \quad (2)$$

On voit donc que l'étude des équations fonctionnelles de cette dernière forme revient à l'étude des courbes invariantes par une substitution $(X, Y; x, y, y')$.

2. *Conséquences et antécédentes.* — La substitution (1) fait correspondre un point (X, Y) à un élément de courbe (x, y, y') . Réciproquement à un point (X, Y) correspondent une infinité d'éléments x, y, y' vérifiant le système (1).

A toute fonction $y = \psi(x)$ la substitution (1) fait correspondre une fonction Y de X qui sera dite la *conséquente* de $\psi(x)$. Les équations (1) permettent de calculer Y' , Y'' ,... en fonction de x , y , y' , y'' ,... Si la transformation (1) n'est pas une transformation de contact, la dérivée $Y^{(n)}$ dépendra de x , y et des dérivées de y jusqu'à l'ordre $n+1$. Il en résulte que si deux courbes ont un élément commun et ont un contact d'ordre n suivant cet élément, leurs conséquentes ont un contact d'ordre $n-1$ au point P correspondant à cet élément; si les deux courbes ont un contact du premier ordre, leurs conséquentes ont au point P deux tangentes distinctes; enfin, si deux courbes passant par un point p et définies dans le voisinage de p ne sont pas tangentes en ce point, leurs conséquentes sont définies l'une dans le voisinage du point P_1 correspondant à l'élément de la première courbe et l'autre dans le voisinage du point P_2 correspondant à l'élément de la deuxième courbe, de sorte que les conséquentes ne peuvent pas, en général, être définies dans un même domaine.

Réciproquement, à une fonction $Y = \psi(X)$, la substitution (1) fait correspondre une infinité de fonctions y de x . Ce sont les intégrales de l'équation différentielle:

$$\varphi(x, y, y') = \psi[f(x, y, y')]$$

Supposons la courbe $Y = \psi(X)$ définie dans le voisinage du point P de coordonnées X_0 , $\psi(X_0)$. A ce point P correspondent une infinité d'éléments. Soit E l'un de ces éléments: il y a en général une courbe intégrale de l'équation différentielle contenant cet élément et définie dans le voisinage de cet élément: cette courbe sera dite *antécédente* de $Y = \psi(X)$. Ainsi une courbe a une infinité d'*antécédentes*. Si deux courbes ont un contact d'ordre n au point P , leurs antécédentes contenant l'élément E ont un contact d'ordre $n+1$ suivant cet élément (bien entendu en écartant toujours le cas où la transformation (1) serait une transformation de contact).

3. On pourra obtenir des courbes invariantes par la substitution (1) comme limite des antécédentes ou des conséquentes successives d'une courbe, à l'aide de la proposition suivante:

THÉORÈME. — Si les antécédentes ou les conséquentes successives $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ... d'une fonction $\psi_0(x)$ sont définies dans un certain domaine commun et ont dans ce domaine une limite $\psi(x)$ pour n infini, si cette limite $\psi(x)$ a une dérivée $\psi'(x)$ et si $\psi_n(x)$, $\psi'_n(x)$ tendent uniformément vers leurs limites dans le domaine considéré, la limite $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle (2).

Cette proposition se démontre comme la proposition analogue relative à l'itération à deux variables que nous avons établie dans la première partie (§ 12).

4. *Éléments doubles.* — Si on veut appliquer le théorème précédent, la difficulté est de définir toutes les antécédentes successives dans un domaine qui leur soit commun.

Il est naturel, pour simplifier, de se limiter au voisinage d'un *élément double* de la substitution.

Nous dirons qu'un élément (x_0, y_0, y'_0) est un élément double de la substitution (1) si le point qui lui correspond est le point (x_0, y_0) lui-même.

Les éléments doubles vérifient le système d'équations:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0, y'_0) \\ y_0 &= \varphi(x_0, y_0, y'_0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Si une courbe contenant l'élément double et définie dans le voisinage de x_0 n'est pas invariante, elle a avec sa conséquente un contact d'un certain ordre p ; il en résulte (§ 2) que la première et la deuxième conséquents auront un contact d'ordre $p-1$, la deuxième et la troisième un contact d'ordre $p-2$, et ainsi de suite; les p premières conséquents seront bien définies dans un certain intervalle $x_0 - h, x_0 + h$, mais la p^{e} conséquente ne contiendra plus l'élément double et la $(p+1)^{\text{e}}$ ne sera plus définie dans le domaine de x_0 : les conséquents finissent donc par passer par des points du plan situés dans des domaines distincts, de sorte que si $f(x, y, y')$ et $\varphi(x, y, y')$ ne sont définies que dans un certain champ, on ne peut pas appliquer la méthode des approximations successives aux conséquents. *Nous nous limiterons donc dans la suite à l'étude des antécédentes.*

5. *Forme réduite de la substitution (1).* Soit (x_0, y_0, y'_0) un élément double: x_0, y_0, y'_0 vérifient les relations (4). On peut, par un changement de variables, amener x_0, y_0, y'_0 à être nuls tous les trois. Il suffit de poser:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u \\ y &= y_0 + y'_0 u + v \end{aligned}$$

d'où l'on déduit: $y' = y'_0 + v'$.

Cette transformation fait correspondre l'élément (u, v, v') à l'élément (x, y, y') et de même le point U, V au point X, Y .

La substitution (1) ainsi transformée devient :

$$\begin{aligned}x_0 + U &= f(x_0 + u, y_0 + y'_0 u + v, y'_0 + v') \\ y_0 + y'_0 U + V &= \varphi(x_0 + u, y_0 + y'_0 u + v', y'_0 + v')\end{aligned}$$

d'où l'on déduit en tenant compte des relations (4) et en n'écrivant dans les seconds membres que les termes du premier degré en u, v, v' :

$$\begin{aligned}U &= u \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_0 + v \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 + v' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 + \dots \\ V &= v \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - y' \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \right]_0 + v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 + \\ &\quad + v' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 + \dots\end{aligned}$$

On peut donc toujours ramener la substitution (1) à la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned}X &= a x + b y + c y' + F(x, y, y') \\ Y &= A x + B y + C y' + \Phi(x, y, y').\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

L'élément double a maintenant pour coordonnées $x = y = y' = 0$. Nous supposons à l'avenir la substitution donnée sous la forme (5) : F et Φ seront des fonctions définies dans le domaine de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues dans ce domaine et tendant vers zéro avec x, y, y' .

Dans la forme ainsi réduite de la substitution, les coefficients a, b, c, A, B, C exprimés en fonction des coordonnées primitives x_0, y_0, y'_0 de l'élément double ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}a &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_0 & A &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - y' \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \right]_0 \\ b &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 & B &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \\ c &= \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 & C &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0.\end{aligned}$$

6. *Courbes invariantes.* — Nous nous proposons de chercher une courbe invariante par la substitution (5) et contenant l'élément double $(0, 0, 0)$.

Nous chercherons à l'obtenir comme limite d'antécédentes successives contenant cet élément double.

Soit donc :

$$Y = \psi_0(X)$$

l'équation d'une courbe contenant l'élément double, c'est-à-dire tangente en O à Ox . Il lui correspond une infinité d'antécédentes qui sont les intégrales de l'équation différentielle :

$$\psi_0[a x + b y + c y' + F(x, y, y')] = A x + B y + C y' + \Phi(x, y, y').$$

Il y a une intégrale et une seule de cette équation passant par l'origine et définie dans le domaine de l'origine *pourvu que C ne soit pas nul*, condition que nous supposons remplie. Cette intégrale est tangente en O à Ox : *c'est elle seule que nous appellerons désormais l'antécédente de la fonction $\psi_0(x)$.*

D'après les propriétés énoncées au § 2, *on voit que les antécédentes successives sont toutes tangentes en O à Ox et qu'elles ont chacune un contact de plus en plus élevé avec la précédente.* Leurs équations sont de la forme :

$$y = \psi_1(x) = a x^2 + \dots$$

$$y = \psi_2(x) = a x^2 + b x^3 + \dots$$

$$y = \psi_3(x) = a x^2 + b x^3 + c x^4 + \dots$$

la série $\psi_n(x)$ ayant ses termes depuis le premier jusqu'au terme en x^{n+1} identiques aux termes de même degré des séries suivantes. S'il existe une fonction invariante par la substitution (5), on connaît ainsi les termes successifs de son développement en série. Ce développement est de la forme :

$$y = a x^2 + \dots$$

Calculons le premier coefficient a : on peut se servir pour cela de la première antécédente, puisque ce coefficient est le même pour la courbe invariante et pour la première antécédente. L'équation différentielle de cette dernière que nous avons écrite plus haut donne, en prenant les dérivées des deux membres et en faisant x égal à zéro dans l'égalité ainsi obtenue :

$$A + C y''_0 = 0$$

d'où :

$$y''_0 = -\frac{A}{C}$$

L'équation de la courbe invariante supposée exister est donc de la forme :

$$y = \frac{A}{C} \frac{x^2}{2} + \dots$$

Ceci nous conduit à faire un nouveau changement de variables qui simplifiera la substitution (5) et à poser :

$$y = \frac{A}{C} \frac{x^2}{2} + y_1$$

d'où :

$$y' = -\frac{A}{C} x + y'_1.$$

La substitution (5) devient :

$$\begin{aligned} X &= \frac{aC - cA}{C} x + b y_1 + c y'_1 + F\left(x, -\frac{A}{C} \frac{x^2}{2} + y_1, -\frac{A}{C} x + y'_1\right) \\ Y_1 &= B y_1 + C y'_1 + \Phi\left(x, -\frac{A}{C} \frac{x^2}{2} + y_1, -\frac{A}{C} x + y'_1\right) + \\ &\quad + \frac{A}{C} \frac{X^2}{2}. \end{aligned}$$

En mettant de nouveau y, y' à la place de y_1, y'_1 pour simplifier les notations et en posant :

$$S = \frac{aC - cA}{C}$$

la substitution (5) prend la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} X &= Sx + by + cy' + F(x, y, y') = f(x, y, y') \\ Y &= By + Cy' + \Phi(x, y, y') = \varphi(x, y, y') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

F et Φ ne sont plus les mêmes fonctions que dans la forme (5) de la substitution, mais ce sont des fonctions possédant les mêmes propriétés, c'est-à-dire définies dans le domaine de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et tendant vers zéro avec x, y, y' . Quant à b, c, B, C ce sont les mêmes quantités que dans (5).

7. Pour démontrer l'existence d'une fonction invariante par la substitution (6), il suffira de démontrer, d'après le théorème du § 3 :

1.^o que les antécédentes successives $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x) \dots$ d'une fonction initiale $\psi_0(x)$ convenablement choisie, antécédentes qui sont obtenues sous forme de séries par l'intégration d'équations différentielles, peuvent être définies et sont convergentes dans un certain intervalle de convergence commun.

2.^o que $\psi_n(x)$ et $\psi'_n(x)$ tendent uniformément vers des limites dans cet intervalle de convergence commun.

Le but final des développements qui suivent est de démontrer les propositions précédentes dans le cas où l'on a :

$$C = 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1.$$

La fonction initiale $\psi_0(x)$ devra être assujettie à certaines restrictions qui seront fixées au cours des démonstrations.

Nous montrerons d'abord comment on peut choisir la fonction initiale de façon à ce que cette fonction et son antécédente puissent être définies dans un intervalle commun *ne dépendant que de la substitution (6) donnée et qu'elles soient assujetties aux mêmes restrictions dans cet intervalle* : on voit qu'on pourra passer alors de la première à la deuxième antécédente comme on est passé de la fonction à la première antécédente, et ainsi de suite, de sorte que toutes les antécédentes, pourront être définies dans un domaine commun. C'est l'objet du théorème suivant :

8. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses : $C = 0$ et $|S| < 1$, on peut déterminer deux nombres positifs δ et h , ne dépendant que de la substitution (6) donnée, de façon que, si $\psi(x)$ est une fonction définie dans l'intervalle $-h, +h$, nulle pour $x = 0$ et vérifiant dans cet intervalle l'inégalité :*

$$|\psi'(x)| < \delta \times |x|$$

son antécédente $\psi_1(x)$ possède les mêmes propriétés, c'est-à-dire soit définie dans l'intervalle $-h, +h$, s'annule pour $x = 0$ et vérifie, dans l'intervalle, l'inégalité :

$$\psi'_1(x) < \delta \times |x|.$$

Soit $y = \psi(x)$ l'équation d'une courbe tangente en O à Ox , la fonction ψ étant définie dans le domaine de l'origine et vérifiant l'inégalité :

$$\psi'(x) < \delta \times |x|.$$

Son antécédente est une fonction y donnée par l'équation différentielle :

$$\psi[Sx + by + cy' + F(x, y, y')] = By + Cy' + \Phi(x, y, y').$$

Cette équation peut être résolue par rapport à y' dans le domaine de l'origine, puisque C est $\neq 0$ et elle admet une intégrale et une seule tangente en O à Ox , de sorte que l'antécédente est définie dans un certain intervalle autour de l'origine. La difficulté est de montrer qu'on peut limiter cet intervalle de façon qu'il ne dépende pas de la fonction ψ , mais seulement de la substitution (6) et de façon que la fonction y ainsi définie vérifie aussi l'inégalité: $|y'| < \delta \times |x|$. Pour le montrer, nous allons intégrer l'équation par approximations successives: on sait que c'est une méthode imaginée par M.^r PICARD (*) pour établir les théorèmes d'existence relatifs aux équations différentielles; cette méthode nous permettra de définir un intervalle de convergence ne dépendant que de la substitution (6). Il convient pour cela de modifier la forme de l'équation différentielle. La substitution donnée est la suivante

$$X = Sx + by + cy' + F(x, y, y')$$

$$Y = By + Cy' + \Phi(x, y, y').$$

Résolvons la deuxième équation par rapport à y' : c'est possible puisque C est $\neq 0$. La substitution prend alors la forme:

$$\left. \begin{aligned} Y &= Sx + by + cy' + F(x, y, y') = f(x, y, y') \\ y' &= -\frac{B}{C}y + \frac{1}{C}Y + \Phi_1(x, y, Y) = \varphi_1(x, y, Y) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Φ_1 est comme F une fonction de trois variables définie dans le voisinage de l'origine, ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et tendant vers zéro en même temps que les variables.

Pour préciser, nous supposons les fonctions F et Φ_1 définies pour les valeurs des variables inférieures en valeur absolue au nombre positif ε : dans ces conditions, les dérivées partielles de ces fonctions sont inférieures en valeur absolue à un nombre positif α , ce dernier nombre pouvant être pris aussi petit qu'on le veut, à condition de prendre ε suffisamment petit, c'est-à-dire de restreindre suffisamment le champ de définition de la substitution.

L'équation différentielle qui définit l'antécédente devient:

$$y' = \varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')]). \quad (8)$$

(*) PICARD, *Traité d'Analyse*. Tome III.

C'est cette équation qu'il s'agit d'intégrer par approximations successives. Nous démontrerons pour cela quelques propositions préliminaires.

LEMME I. La fonction y de x étant définie dans l'intervalle $-h, +h$, s'annulant pour $x=0$ et vérifiant l'inégalité $|y'| < \delta \times |x|$, on a dans tout l'intervalle $-h, +h$ l'inégalité:

$$f(x, y, y') < x$$

pourvu que δ et h soient suffisamment petits.

On a en effet:

$$f(x, y, y') = Sx + by + cy' + F(x, y, y').$$

La fonction $F(x, y, y')$ n'étant définie que pour les valeurs de x, y, y' inférieures en valeur absolue à ε , il faut tout d'abord s'assurer que x, y, y' sont compris dans ces limites. Or on a:

$$|y'| < \delta \times |x|$$

d'où:

$$y < \frac{\delta x^2}{2}.$$

Il suffit que l'on ait:

$$|x| < \varepsilon \quad \delta |x| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\delta x^2}{2} < \varepsilon$$

d'où les trois conditions:

$$|x| < \varepsilon \quad |x| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad |x| < \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\delta}}. \quad (9)$$

Le nombre h doit donc déjà être pris inférieur à la fois à ε , $\frac{\varepsilon}{\delta}$ et $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\delta}}$.

On a alors:

$$f(x, y, y') < Sx + by + cy' + z[|x| + |y| + |y'|]$$

et a fortiori, en tenant compte des inégalités $|y'| < \delta |x|$ et $y < \frac{\delta x^2}{2}$:

$$f(x, y, y') < S|x| + b \frac{\delta x^2}{2} + c \delta |x| + z \left[|x| + \frac{\delta x^2}{2} + \delta |x| \right]$$

ou bien:

$$f(x, y, y') < |x| [S + c\delta + z + \alpha\delta] + \frac{\delta x^2}{2} [b + z].$$

Pour que le premier membre soit inférieur à $|x|$, il suffit qu'il en soit ainsi du second membre, ce qui donne, en divisant par $|x|$ les deux membres de l'inégalité ainsi obtenue:

$$|S'| + |c| \delta + \alpha + \alpha \delta + \frac{\delta |x|}{2} [|b| + |a|] < 1.$$

Le premier membre de cette inégalité est une fonction continue de α , δ et $|x|$; pour $\alpha = \delta = |x| = 0$ elle se réduit à $|S'|$ qui, par hypothèse, est inférieur à 1. Il en résulte qu'il existe un nombre positif h , *ne dépendant que des coefficients* $|b|$, $|c|$ *et* $|S'|$, tel que l'inégalité précédente soit satisfaite, pourvu que α , δ et $|x|$ vérifient les inégalités:

$$\alpha < h \quad \delta < h \quad |x| < h. \quad (10)$$

On aura donc bien:

$$|f(x, y, y')| < |x|$$

pourvu que ε soit pris assez petit pour que α soit inférieur à h et que δ et $|x|$ soient aussi inférieurs à h .

LEMME II. $\psi(x)$ et y étant des fonctions de x définies dans l'intervalle $h, +h$, s'annulant pour $x = 0$ et vérifiant les inégalités:

$$|y'| < \delta |x| \quad \text{et} \quad |\psi'(x)| < \delta |x|$$

la fonction $\varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')])$ est une fonction de x définie dans le même intervalle et inférieure en valeur absolue à $\delta |x|$, pourvu que h soit suffisamment petit.

La fonction φ_1 étant une fonction de trois variables définie pour les valeurs des trois variables inférieures en valeur absolue à ε , il faut tout d'abord s'assurer que $|x|$, $|y|$ et $|\psi[f(x, y, y')]|$ sont inférieurs à ε , pour toutes les valeurs de x comprises entre $-h$ et $+h$. Or on a choisi h de façon que $|x|$ vérifie les inégalités (9); il en résulte d'abord:

$$|x| < \varepsilon \quad |y| < \frac{\delta x^2}{2} < \varepsilon.$$

De plus, on a d'après le lemme I:

$$|f(x, y, y')| < |x| < h$$

et par suite:

$$|\psi[f(x, y, y')]| < \frac{\delta}{2} |f(x, y, y')|^2 < \frac{\delta x^2}{2} < \varepsilon.$$

La fonction φ_1 est donc une fonction de x définie dans l'intervalle $-h, +h$.

Il faut prouver maintenant que la valeur absolue de φ_1 est inférieure à $\delta|x|$. Posons pour abréger: $\psi[f(x, y, y')] = \psi_1$. On a:

$$\varphi_1(x, y, \psi_1) = -\frac{B}{C}y + \frac{1}{C}\psi_1 - \Phi(x, y, \psi_1)$$

d'où:

$$|\varphi_1| < \left| \frac{B}{C} \right| |y| + \left| \frac{1}{C} \right| |\psi_1| + \alpha |x| + |y - \psi_1|.$$

Or on a:

$$|y| < \frac{\delta x^2}{2} \quad \text{et} \quad |\psi_1| < \frac{\delta}{2} |f(x, y, y')|^2 < \frac{\delta x^2}{2}$$

puisque $|f(x, y, y')|$ est inférieur à $|x|$ et par suite à h (Lemme I).

Donc:

$$|\varphi_1| < \left[\left| \frac{B}{C} \right| + \left| \frac{1}{C} \right| \right] \frac{\delta x^2}{2} + \alpha \left[|x| + \frac{2\delta x^2}{2} \right]$$

ou:

$$|\varphi_1| < \left[\left| \frac{B}{C} \right| + \left| \frac{1}{C} \right| + 2\alpha \right] \frac{\delta x^2}{2} + \alpha |x|.$$

Pour que $|\varphi_1|$ soit inférieur à $\delta|x|$, il suffit qu'il en soit ainsi du second membre de l'inégalité, ce qui donne:

$$\frac{\delta |x|}{2} \left[\left| \frac{B}{C} \right| + \left| \frac{1}{C} \right| + 2\alpha \right] + \alpha < \delta$$

d'où:

$$\frac{|x|}{2} < \frac{\delta - \alpha}{\delta \left[\left| \frac{B}{C} \right| + \left| \frac{1}{C} \right| + 2\alpha \right]}.$$

Cette inégalité peut être satisfaite, en prenant h suffisamment petit, pourvu toutefois que le second membre soit positif, ce qui donne:

$$\delta > \alpha$$

α et δ n'ont été assujettis jusqu'ici qu'à vérifier les inégalités (10). On peut toujours supposer en outre que l'on a pris: $\alpha < \delta$.

Le lemme est donc démontré pourvu que h , α et δ vérifient de nouvelles inégalités, qui ne dépendent toujours que de la substitution, et qui peuvent être satisfaites.

Ces deux lemmes étant démontrés, revenons à l'intégration par approximations successives de l'équation différentielle :

$$y' = \varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')]) \quad (8)$$

qui définit l'antécédente.

Remplaçons dans le second membre y par une fonction quelconque y_1 , définie dans l'intervalle $-h, +h$, nulle pour $x=0$ et vérifiant la condition :

$$y'_1 < \delta |x|$$

et déterminons la fonction y_2 par l'équation :

$$y'_2 = \varphi_1(x, y_1, \psi[f(x, y_1, y'_1)]).$$

D'après le lemme II, le second membre est une fonction définie dans l'intervalle $-h, +h$ de sorte que par une quadrature on obtient la fonction y_2 vérifiant l'équation précédente et nulle pour $x=0$; cette fonction est définie dans le même intervalle et vérifie la même condition que y_1 :

$$|y'_2| < \delta |x|$$

d'après le lemme II.

On déterminera de même la fonction y_3 par l'équation :

$$|y'_3| = \varphi_1(x, y_2, \psi[f(x, y_2, y'_2)])$$

et cette fonction, définie encore dans l'intervalle $-h, +h$, vérifiera la même inégalité que y_1 et y_2 . Et ainsi de suite.

Les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sont définies dans un domaine commun $-h, +h$ et y_n vérifie l'inégalité :

$$|y'_n| < \delta |x|.$$

Il faut prouver que y_n tend vers une limite pour n infini et que cette limite vérifie l'équation différentielle (8): l'intégrale de cette équation qui s'annule pour $x=0$ sera ainsi définie dans l'intervalle $-h, +h$.

Pour prouver que y_n a une limite, il suffit de prouver que la série $\Sigma(y_{n+1} - y_n)$ est convergente. On a :

$$y'_{n+1} = \varphi_1(x, y_n, \psi_n)$$

$$y'_n = \varphi_1(x, y_{n-1}, \psi_{n-1})$$

avec :

$$\psi_n = \psi[f(x, y_n, y'_n)]$$

d'où:

$$|y'_{n+1} - y'_n| = |\varphi_1(x, y_n, \psi_n) - \varphi_1(x, y_{n-1}, \psi_{n-1})|.$$

Désignons par β une limite supérieure des modules des dérivées partielles de f et de φ_1 : on avait désigné précédemment par α une limite supérieure des modules des dérivées partielles de F et de Φ_1 et les relations (7) montrent par suite qu'il suffit de prendre pour β le plus grand des nombres:

$$|S| \leq \alpha, \quad |b| \leq \alpha, \quad |c| \leq \alpha, \quad \left| \frac{B}{C} \right| \leq \alpha, \quad \left| \frac{1}{C} \right| \leq \alpha$$

de sorte que β est connu en même temps que α .

On a:

$$|y'_{n+1} - y'_n| \leq \beta |y_n - y_{n-1}| + \beta |\psi_n - \psi_{n-1}| \quad (11)$$

et:

$$\begin{aligned} \psi_n - \psi_{n-1} &= \psi[f(x, y_n, y'_n)] - \psi[f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})] = \\ &= [f(x, y_n, y'_n) - f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})] \psi'(\xi) \end{aligned}$$

ξ est un nombre compris entre $f(x, y_n, y'_n)$ et $f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})$ et par suite inférieur en valeur absolue à $|x|$ et, a fortiori, à $|h|$ (Lemme I), de sorte que l'on a:

$$|\psi'(\xi)| \leq \delta \leq \delta h$$

et:

$$|\psi_n - \psi_{n-1}| \leq [\beta |y_n - y_{n-1}| + \beta |y'_n - y'_{n-1}|] \delta h.$$

L'inégalité (11) devient:

$$|y'_{n+1} - y'_n| \leq \beta |y_n - y_{n-1}| + \beta^2 \delta h |y_n - y_{n-1}| + \beta^2 \delta h |y'_n - y'_{n-1}|$$

ou:

$$|y'_{n+1} - y'_n| \leq \beta (1 + \beta \delta h) |y_n - y_{n-1}| + \beta^2 \delta h |y'_n - y'_{n-1}|. \quad (12)$$

Dans cette inégalité donnons d'abord à n la valeur 2. Elle devient:

$$|y'_3 - y'_2| \leq \beta (1 + \beta \delta h) |y_2 - y_1| + \beta^2 \delta h |y'_2 - y'_1|.$$

Or on a:

$$|y'_1| \leq \delta h \quad |y'_2| \leq \delta h$$

d'où:

$$|y'_2 - y'_1| \leq 2 \delta h$$

et de même:

$$|y_1| < \frac{\delta h^2}{2} \quad |y_2| < \frac{\delta h^2}{2}$$

d'où:

$$|y_2 - y_1| < \delta h^2.$$

Par suite:

$$|y'_3 - y'_2| < \beta(1 + \beta \delta h) \delta h^2 + \beta^2 \delta h + 2 \beta \delta h$$

ou:

$$|y'_3 - y'_2| < \beta \delta h^2 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta).$$

On en déduit une limite supérieure de $|y_3 - y_2|$:

$$|y_3 - y_2| < \beta \delta h^2 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta) |x| < \beta \delta h^3 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta).$$

De ces limites supérieures pour $|y_3 - y_2|$ et $|y'_3 - y'_2|$, on déduit des limites supérieures pour $|y'_4 - y'_3|$ et $|y_4 - y_3|$, en donnant à n la valeur 3 dans l'inégalité (12):

$$\begin{aligned} |y'_4 - y'_3| &< \beta(1 + \beta \delta h) |y_3 - y_2| + \beta^2 \delta h |y'_3 - y'_2| \\ &< \beta^2 \delta h^3 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta) (1 + \beta \delta h + \beta \delta) \\ &< \beta^2 \delta h^3 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^2 \end{aligned}$$

d'où:

$$|y_4 - y_3| < \beta^2 \delta h^4 (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^2.$$

On voit immédiatement qu'on a d'une façon générale:

$$\begin{aligned} |y'_{n+1} - y'_n| &< \beta^{n+1} \delta h^n (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^{n-1} \\ |y_{n+1} - y_n| &< \beta^{n+1} \delta h^{n+1} (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta)^{n-1}. \end{aligned}$$

Les séries $\sum (y_{n+1} - y_n)$ et $\sum (y'_{n+1} - y'_n)$ sont donc uniformément et absolument convergentes dans l'intervalle $-h, +h$ pourvu que l'on ait:

$$\beta h (1 + \beta \delta h + 2 \beta \delta) < 1.$$

On peut toujours choisir h suffisamment petit pour qu'il en soit ainsi.

Il résulte de là que y_n et y'_n tendent uniformément vers des limites. Soit $\lim y_n = y$. A cause de la convergence uniforme de la suite des dérivées, on aura: $\lim y'_n = y'$. Or on a en général:

$$y'_n = \varphi_1(x, y_{n-1}, \psi[f(x, y_{n-1}, y'_{n-1})]).$$

En égalant les limites des deux membres pour n infini, on obtient:

$$y' = \varphi_1(x, y, \psi[f(x, y, y')]).$$

La limite y vérifie donc l'équation différentielle (8) et on a ainsi prouvé que l'intégrale de cette équation nulle pour $x=0$ est définie dans un certain intervalle $-h, +h$ ne dépendant que de la substitution donnée et indépendante de la fonction ψ .

Il reste à prouver que l'intégrale y ainsi obtenue vérifie l'inégalité:

$$|y'| < \delta |x|$$

dans tout l'intervalle $-h, +h$.

Or on a:

$$|y'_n| < \delta |x|$$

quel que soit n et $|y'_n|$ a pour limite y' lorsque n augmente indéfiniment. Il en résulte:

$$|y'| \leq \delta |x|$$

l'inégalité peut devenir une égalité, mais cela ne changera rien aux conclusions que nous allons en tirer.

Le théorème est donc démontré.

9. Il résulte de ce théorème que toutes les antécédentes

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$$

d'une fonction $\psi_0(x)$ convenablement choisie sont définies dans un certain domaine commun $-h, +h$.

La substitution étant ramenée à la forme (7), on pourra en effet déterminer à l'aide de cette substitution, les nombres δ et h dont il s'agit dans le théorème du § 8. Partant alors d'une fonction $\psi_0(x)$ définie dans l'intervalle $-h, +h$, nulle pour $x=0$ et vérifiant l'inégalité $|\psi_0(x)| < \delta |x|$, le théorème du § 8 montre que l'antécédente de cette fonction est définie dans le même intervalle et y vérifie la même inégalité. En appliquant de nouveau le théorème, on passe de cette fonction $\psi_1(x)$ à son antécédente et la deuxième antécédente $\psi_2(x)$ se trouve définie dans l'intervalle $-h, +h$ et y vérifie toujours la même inégalité. Et ainsi de suite. On voit qu'en général $\psi_n(x)$ est défini dans le domaine $-h, +h$.

Nous allons montrer maintenant que les antécédentes convergent uniformément vers une limite dans le domaine $-h, +h$, pourvu que h soit suffisamment petit.

10. LEMME. — Soit u une fonction de x nulle pour $x=0$, définie dans l'intervalle $-h, +h$, ayant une dérivée dans cet intervalle et y vérifiant l'inégalité:

$$\left| \frac{du}{dx} \right| < k|u| + k'$$

où k et k' désignent deux nombres positifs. On a dans tout l'intervalle:

$$|u| < k' h e^{kh}.$$

On a:

$$u = \pm |u|$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{d|u|}{dx}$$

$$\left| \frac{du}{dx} \right| = \left| \frac{d|u|}{dx} \right|.$$

L'inégalité donnée devient:

$$\left| \frac{d|u|}{dx} \right| < k|u| + k'$$

et puisque $\frac{d|u|}{dx}$ est inférieur ou égal à son module, on a aussi:

$$\frac{d|u|}{dx} < k|u| + k'$$

et par suite:

$$e^{-kx} \left[\frac{d|u|}{dx} - k|u| - k' \right] < 0.$$

Le premier membre est la dérivée de la fonction:

$$v = e^{-kx} \left[|u| + \frac{k'}{k} \right].$$

Supposons d'abord x positif.

La fonction v est décroissante dans l'intervalle $0, x$ et sa valeur pour la valeur x de la variable est inférieure à sa valeur pour $x=0$, ce qui donne l'inégalité:

$$e^{-kx} \left[|u| + \frac{k'}{k} \right] < \frac{k'}{k}$$

d'où:

$$|u| < \frac{k'}{k} (e^{kx} - 1)$$

et, a fortiori:

$$|u| < \frac{k'}{k} \cdot k h e^{kh}$$

ou:

$$|u| < k' h e^{kh}.$$

Supposons maintenant x négatif et posons $x = -x'$. On a:

$$\frac{d u}{d x} = - \frac{d u}{d x'}.$$

et l'inégalité donnée devient:

$$\left| \frac{d u}{d x'} \right| < k |u| + k'$$

d'où l'on déduit comme précédemment:

$$|u| < k' h e^{kh}.$$

11. THÉORÈME. Supposons $C \neq 0$ et $|S| < 1$ et soit $\psi(x)$ une fonction vérifiant les conditions du théorème du § 8, $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x) \dots$ les antécédentes successives de cette fonction: lorsque n augmente indéfiniment, $\psi_n(x)$ et $\psi'_n(x)$ tendent uniformément vers des limites dans le domaine $-h, +h$ pourvu que h soit suffisamment petit. La fonction limite est indépendante de la fonction initiale $\psi(x)$.

Considérons deux fonctions $\psi(x), \theta(x)$ vérifiant les conditions du théorème du § 8, c'est-à-dire définies dans l'intervalle $-h, +h$, nulles pour $x=0$ et satisfaisant aux inégalités:

$$|\psi'(x)| < \delta |x| \quad \text{et} \quad |\theta'(x)| < \delta |x|$$

et soient:

$$y_1 = \psi_1(x) \quad z_1 = \theta_1(x)$$

leurs antécédentes.

Nous allons comparer $\psi_1 - \theta_1$ à $\psi - \theta$.

Soit σ le maximum de la fonction $|\psi - \theta|$ dans l'intervalle $-h, +h$, de sorte que, si l'on a $|x| < h$, on a aussi:

$$|\psi(x) - \theta(x)| < \sigma.$$

Les fonctions y_1 et z_1 vérifient respectivement l'équation différentielle (8) et une équation analogue, qui sont les suivantes:

$$\begin{aligned} y'_1 &= \varphi_1(x, y_1, \psi[f(x, y_1, y'_1)]) \\ z'_1 &= \varphi_1(x, z_1, \theta[f(x, z_1, z'_1)]). \end{aligned}$$

Si on désigne par β , comme au § 8, le module maximum des dérivées partielles des fonctions f et φ_1 dans le champ de définition de ces fonctions, on déduit des équations précédentes, en les retranchant membre à membre:

$$y'_1 - z'_1 \leq \beta |y_1 - z_1| + \beta |\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]|.$$

On a:

$$\begin{aligned} \psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)] &= \psi[f(x, y_1, y'_1)] - \\ &\quad - \psi[f(x, z_1, z'_1)] + \psi[f(x, z_1, z'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)] \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} |\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]| &\leq |\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \\ &\quad - \psi[f(x, z_1, z'_1)]| + |\psi[f(x, z_1, z'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]|. \end{aligned}$$

La quantité $f(x, z_1, z'_1)$ est en valeur absolue inférieure à $|x|$, (lemme I du § 8) et par suite on a:

$$|\psi[f(x, z_1, z'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]| < \sigma.$$

D'autre part:

$$\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \psi[f(x, z_1, z'_1)] = \psi'(\xi)[f(x, y_1, y'_1) - f(x, z_1, z'_1)]$$

ξ étant un nombre compris entre $f(x, y_1, y'_1)$ et $f(x, z_1, z'_1)$ et par suite inférieur à $|x|$ (Lemme I du § 8), de sorte que l'on a:

$$\psi'(\xi) < \delta h$$

Il en résulte:

$$|\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \psi[f(x, z_1, z'_1)]| < [\beta |y_1 - z_1| + \beta |y'_1 - z'_1|] \delta h$$

et finalement:

$$|\psi[f(x, y_1, y'_1)] - \theta[f(x, z_1, z'_1)]| < \beta \delta h [|y_1 - z_1| + |y'_1 - z'_1|] + \sigma.$$

On a donc:

$$y'_1 - z'_1 \leq \beta |y_1 - z_1| + \beta^2 \delta h [|y_1 - z_1| + |y'_1 - z'_1|] + \beta \sigma$$

d'où:

$$|y'_1 - z'_1| (1 - \beta^2 \delta h) < \beta (1 + \beta \delta h) |y_1 - z_1| + \beta \sigma.$$

En supposant $h < \frac{1}{\beta^2 \delta}$, ce qui est possible à condition de restreindre l'intervalle $-h, +h$, on en déduit:

$$|y'_1 - z'_1| < \frac{\beta(1 + \beta \delta h)}{1 - \beta^2 \delta h} |y_1 - z_1| + \frac{\beta \sigma}{1 - \beta^2 \delta h}.$$

Posons:

$$\frac{\beta(1 + \beta \delta h)}{1 - \beta^2 \delta h} = k \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{1 - \beta^2 \delta h} = k'.$$

L'inégalité devient:

$$|y'_1 - z'_1| < k |y_1 - z_1| + k' \sigma$$

et on en déduit, en vertu du lemme démontré au paragraphe précédent,

$$|y_1 - z_1| < k' h e^{kh} \sigma.$$

Ainsi, l'inégalité:

$$|\psi_1(x) - \theta_1(x)| < \sigma$$

entraîne pour les antécédentes $\psi_1(x)$, $\theta_1(x)$ de $\psi(x)$ et de $\theta(x)$ l'inégalité:

$$|\psi_1(x) - \theta_1(x)| < k' h e^{kh} \sigma.$$

Prenons pour fonction θ la première antécédente ψ_1 : alors θ_1 devient la deuxième antécédente ψ_2 et, en désignant par $\psi_3, \dots, \psi_4, \dots$ les antécédentes successives, on a les inégalités:

$$\begin{aligned} |\psi_1(x) - \psi_1(x)| &< \sigma \\ |\psi_1(x) - \psi_2(x)| &< k' h e^{kh} \sigma \\ |\psi_2(x) - \psi_3(x)| &< (k' h e^{kh})^2 \sigma \\ &\vdots \\ |\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)| &< (k' h e^{kh})^n \sigma. \end{aligned}$$

Supposons h choisi de telle sorte que l'on ait:

$$k' h e^{kh} < 1.$$

On a:

$$k' h e^{kh} = \frac{\beta h}{1 - \beta^2 \delta h} e^{\frac{\beta h(1 + \beta \delta h)}{1 - \beta^2 \delta h}}.$$

C'est une fonction de h nulle pour $h = 0$ et continue dans le domaine de $h = 0$; on peut donc prendre h suffisamment petit pour que $k' h e^{kh}$ soit

inférieur à 1. Alors la série dont le terme général est $(k' h e^{kh})^n \sigma$ est convergente et par suite la série $\Sigma [\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)]$ est absolument et uniformément convergente dans un certain domaine $-h, +h$.

Ceci prouve que $\psi_n(x)$ tend uniformément vers une limite $\psi(x)$.

Montrons que $\psi'_n(x)$ tend aussi uniformément vers une limite. On a démontré l'inégalité:

$$y'_1 - z'_1 | < k | y_1 - z_1 | + k' \sigma.$$

On a donc:

$$|y'_1 - z'_1| < k k' h e^{kh} \sigma + k' \sigma$$

ou bien:

$$|y'_1 - z'_1| < k' \sigma [k h e^{kh} + 1]$$

Si y_1 désigne la première antécédente et z_1 la deuxième, on a :

$$|\psi'_1 - \psi'_2| < k' (1 + k h e^{kh}) \sigma.$$

Ainsi l'inégalité:

$$|\psi(x) - \psi_1(x)| < \sigma$$

entraîne :

$$|\psi'_1(x) - \psi'_2(x)| < k' (1 + k h e^{kh}) \sigma$$

Plus généralement, l'inégalité:

$$|\psi_{n-1}(x) - \psi_n(x)| < (k' h e^{kh})^{n-1} \sigma$$

entraînera:

$$|\psi'_n(x) - \psi'_{n+1}(x)| < k' (1 + k h e^{kh}) (k' h e^{kh})^{n-1} \sigma.$$

Puisque $k' h e^{kh}$ est inférieur à 1, la série $\Sigma [\psi'_n(x) - \psi'_{n+1}(x)]$ est uniformément convergente dans le domaine $-h, +h$.

Donc $\psi'_n(x)$ tend uniformément vers une limite, qui est nécessairement égale à $\psi'(x)$

Enfin la limite $\psi(x)$ est indépendante de la courbe initiale: en effet, si on part de deux fonctions initiales différentes $\psi(x)$, $\theta(x)$ et si σ désigne le module maximum de $\psi(x) - \theta(x)$, on a, en désignant par $\psi_n(x)$ et $\theta_n(x)$ les n^{es} antécédentes:

$$|\psi_n(x) - \theta_n(x)| < (k' h e^{kh})^n \sigma.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\psi_n(x) - \theta_n(x)$ tend vers zéro, ce qui prouve que $\psi_n(x)$ et $\theta_n(x)$ ont des limites égales.

Le théorème est donc démontré. En se servant maintenant du théorème

du § 3, on voit qu'on a défini dans l'intervalle $-h, +h$ une solution de l'équation fonctionnelle (7).

12. Les théorèmes des §§ 8 et 11 ont été démontrés dans l'hypothèse où l'on a :

$$C \neq 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1.$$

dans la substitution (6) du § 6.

On a pris pour origine le point double x_0, y_0, y'_0 de la substitution. Revenons aux notations du début, c'est-à-dire supposons la substitution donnée sous la forme :

$$X = f(x, y, y')$$

$$Y = \varphi(x, y, y')$$

et soient x_0, y_0, y'_0 les coordonnées d'un élément double: calculons C et S en fonction de x_0, y_0, y'_0 . En se reportant aux §§ 5 et 6, on voit que l'on a :

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0$$

$$S = \frac{aC - cA}{C} = \left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' \right) \frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}} \right]_0 = \left(\frac{[f\varphi]}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}} \right)_0$$

en désignant par $[f\varphi]$ le numérateur de S , comme on le fait dans la théorie des équations aux dérivées partielles, où cette expression est connue sous le nom de *crochet de Poisson*.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui résume les théorèmes des §§ 3, 8 et 11.

THÉORÈME. — *Etant donnée la substitution :*

$$X = f(x, y, y')$$

$$Y = \varphi(x, y, y')$$

et un élément double (x_0, y_0, y'_0) de cette substitution dans le domaine duquel f et φ sont définies, continues et ont des dérivées partielles du premier ordre continues, posons :

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 \quad \text{et} \quad S = \frac{[f\varphi]}{C}.$$

Si l'on a:

$$C \neq 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1$$

il existe une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la substitution et contenant l'élément double x_0, y_0, y'_0 , $\psi(x)$ étant une fonction définie dans un certain intervalle $x_0 - h, x_0 + h$ et ayant une dérivée dans cet intervalle. Cette fonction vérifie, dans cet intervalle, l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x, \psi(x), \psi'(x))] = \varphi(x, \psi(x), \psi'(x)).$$

13. EXEMPLE. — Soit à trouver une fonction $\psi(x)$ telle que sa dérivée se déduise de la fonction en y remplaçant x par une fonction donnée $f(x)$.

L'équation fonctionnelle que vérifie $\psi(x)$ est:

$$\psi[f(x)] = \psi'(x) \tag{13}$$

elle définit une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la substitution:

$$X = f(x) \quad Y = y'.$$

Les éléments doubles (x_0, y_0, y'_0) vérifient les équations:

$$x - f(x) = 0 \quad y = y'.$$

Soit y une quantité arbitraire et x_0 une racine de l'équation $f(x) - x = 0$. Le point x_0, y_0 et la droite de coefficient angulaire y_0 passant par ce point constituent un élément double et on a, pour cet élément:

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_0 = 1 \quad S = \frac{[f \varphi]}{C} = f'(x_0).$$

Supposons donc $|f'(x_0)| < 1$. On pourra alors définir une solution $y = f(x)$ de l'équation (13), contenant l'élément (x_0, y_0, y'_0) et qu'on obtiendra comme limite des antécédentes successives d'une courbe arbitraire:

$$Y = F(X).$$

La première antécédente est définie par l'équation différentielle:

$$y' = F[f(x)]$$

d'où

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x F[f(x)] dx.$$

En remplaçant dans cette équation x par $f(x)$ et y par y' , on obtient l'équation différentielle de la deuxième antécédente:

$$y' = y_0 + \int_{x_0}^{f(x)} F[f(x)] dx$$

d'où l'équation de la deuxième antécédente:

$$y_2 = y_0 + y_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} F[f(x)] dx.$$

On a de même:

$$y_3 = y_0 + y_0(x - x_0) + y_0 \int_{x_0}^x [F(x) - x_0] dx + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} dx \int_{x_0}^{f_2(x)} F[f(x)] dx$$

et, en général, on a pour équation de la n^e antécédente:

$$y_n = y_0 + y_0(x - x_0) + \dots + y_0 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} \dots dx \int_{x_0}^{f_2(x)} [f(x) - x_0] dx + \dots \\ \dots + y_0 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} dx \dots \int_{x_0}^{f_{n-2}(x)} [f(x) - x_0] dx + R_n$$

en désignant par $f_p(x)$ la p^e itérée de la fonction $f(x)$ et en posant:

$$R_n = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} \dots dx \int_{x_0}^{f_{n-1}(x)} F[f(x)] dx.$$

Il est facile de voir que le terme complémentaire R_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment: en effet, si x est compris dans un intervalle $x_0 - h, x_0 + h$ suffisamment restreint, il en est de même de $f(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x)$ à cause de l'hypothèse $|f'(x_0)| < 1$ (*). Soit d'autre part M le module maximum de $F(x)$ dans l'intervalle $x_0 - h, x_0 + h$; on a:

$$\left| \int_{x_0}^x F[f(x)] dx \right| < Mh; \quad \left| \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} F[f(x)] dx \right| < \left| \int_{x_0}^x Mh dx \right| < Mh^2; \dots$$

(*) KÖNIGS, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1883).

et en général:

$$|R_n| < M h^n$$

R_n tend vers zéro si h est suffisamment petit.

On a donc ainsi une solution de l'équation (13) représentée par le développement en série suivant:

$$y = y_0 + y_0(x - x_0) + \dots + y_0 \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^{f(x)} dx \dots \int_{x_0}^{f_n(x)} [f(x) - x_0] dx + \dots$$

D'après la théorie générale, cette série est uniformément convergente dans un certain intervalle $x_0 - h, x_0 + h$ et vérifie l'équation (13): il est d'ailleurs aisé de le vérifier directement.

14. Revenons à la théorie générale. Le théorème du § 12 fournit une courbe invariante passant par l'élément double (x_0, y_0, y'_0) à condition que, pour cet élément, C ne soit pas nul et que $|S|$ soit inférieur à 1. La courbe ainsi obtenue par la méthode des approximations successives est-elle la seule courbe invariante contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0) ? On peut répondre affirmativement à cette question, tout au moins dans le cas où, les fonctions $f(x, y, y')$ et $\varphi(x, y, y')$ étant analytiques, on cherche une courbe invariante analytique, hypothèse que nous n'avons pas faite jusqu'ici; en effet prenons la substitution sous la forme (6): la fonction inconnue $y = \psi(x)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle:

$$\psi[Sx + b\psi + c\psi' + \dots] = B\psi + C\psi' + \dots$$

avec les conditions:

$$\psi(0) = 0 \quad \psi'(0) = 0.$$

En prenant les dérivées successives des deux membres et en y remplaçant x par zéro, on obtient des égalités permettant de calculer les coefficients $\psi''_0, \psi'''_0, \dots$ et on constate que le calcul formel est possible et donne un développement unique si C n'est pas nul: le développement ainsi obtenu coïncide nécessairement avec celui que fournit la méthode des approximations successives, dans le cas où $|S|$ est inférieur à 1 et il est convergent, d'après le théorème du § 12.

15. Cas où $|S|$ est supérieur à 1. — Il reste à voir si, dans le cas où $|S|$ est supérieur à 1, le développement obtenu est encore convergent:

l'hypothèse $|S| < 1$ a été en effet introduite dans la méthode des approximations successives pour permettre de définir un domaine d'existence commun à toutes les antécédentes et il est facile de voir que, dans l'hypothèse où $|S|$ est supérieur à 1, les diverses antécédentes sont définies dans des domaines dont l'étendue tend vers zéro. Il serait donc préférable de recourir, dans ce cas, à la méthode des fonctions majorantes pour étudier la convergence du développement formel: il faudrait, pour cela, former une *substitution majorante* pour laquelle on puisse connaître directement une courbe invariante: n'ayant pas pu obtenir une pareille fonction, je dois me borner à faire quelques remarques relatives à ce cas.

On peut voir tout d'abord que dans le cas où $|S|$ est supérieur à 1, le développement formel peut être soit convergent, soit divergent et que par suite il y aurait lieu de chercher de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour que le développement soit convergent. Je vais donner en effet un exemple où, $|S|$ étant plus grand que 1, le développement est divergent et un deuxième exemple où, $|S|$ étant encore supérieur à 1, le développement est convergent.

1^{er} exemple. Soit la substitution $X = Sx$ $Y = y'$ à laquelle correspond l'équation:

$$\psi(Sx) = \psi'(x).$$

Considérons l'élément double $0, y_0, y_0$. Le développement formel est le suivant:

$$y = y_0 + y_0 x + S y_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + S^{\frac{(n-1)n}{2}} y_0 \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Le cas où $|S|$ est inférieur à 1 est un cas particulier de l'exemple traité au § 13: dans ce cas le développement est convergent et même convergent quel que soit x .

Si au contraire $|S|$ est supérieur à 1, la série est divergente.

Par l'élément double $(0, y_0, y_0)$, il ne passe aucune courbe analytique invariante.

2^e exemple. Montrons maintenant qu'il peut y avoir une courbe invariante même si $|S|$ est supérieur à 1.

Considérons en effet une substitution à deux variables:

$$X = f(x, y) = S_1 x + \dots$$

$$Y = \varphi(x, y) = S_2 y + \alpha x^2 + \dots$$

Supposons $|S_1|$ supérieur à 1. D'après la théorie de l'itération à deux variables (Ch. I), il y a une courbe invariante $y = \psi(x)$ tangente à Ox à l'origine. On trouve:

$$\psi(x) = \frac{\alpha x^2}{S_1^2 - S_2} + \dots$$

d'où:

$$\psi'(x) = \frac{2\alpha x}{S_1^2 - S_2} + \dots$$

Considérons alors la substitution $(X, Y; x, y, y')$ suivante:

$$X = f(x, y) + \psi'(x) - y'$$

$$Y = \varphi(x, y) + \psi(x) - y'.$$

Cette substitution admet évidemment la courbe invariante $y = \psi(x)$. Calculons $|S|$. La substitution précédente s'écrit:

$$X = x \left(S_1 + \frac{2\alpha}{S_1^2 - S_2} \right) - y' + \dots$$

$$Y = \frac{2\alpha x}{S_1^2 - S_2} + S_2 y - y' + \dots$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

On a:

$$|S| = \frac{aC - cA}{C} = S_1 + \frac{2\alpha}{S_1^2 - S_2} - \frac{2\alpha}{S_1^2 - S_2} = S_1$$

et par suite:

$$|S| > 1.$$

Considérons par exemple la substitution:

$$X = 2x$$

$$Y = 3y - x^3$$

qui laisse invariante la courbe: $y = \frac{x^3}{5}$.

On en déduit la substitution:

$$X = 2x - y' + \frac{3x^2}{5}$$

$$Y = 3y + y' - \frac{3x^2}{5} - x^3$$

qui laisse invariante la même courbe $y = \frac{x^3}{5}$: cette courbe contient l'élément double $(0, 0, 0)$ pour lequel on a: $|S| = 2$.

On voit par cet exemple qu'il peut y avoir une courbe invariante contenant un élément double, même si pour cet élément on a: $|S| > 1$.

On peut se demander alors si la quantité S joue bien un rôle essentiel dans la question ou si son introduction n'est pas due uniquement à l'emploi de la méthode des approximations successives. Nous allons montrer que la quantité S se présente bien comme un élément essentiel dans l'étude des substitutions $(X, Y; x, y, y')$.

16. *Transformations ponctuelles de l'équation fonctionnelle* (2). — Supposons qu'on effectue sur x, y d'une part et sur X, Y d'autre part une même transformation ponctuelle:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(u, v) & X &= \lambda(U, V) \\ y &= \mu(u, v) & Y &= \mu(U, V). \end{aligned}$$

La substitution donnée $(X, Y; x, y, y')$ devient une substitution $(U, V; u, v, v')$: l'élément double (x_0, y_0, y'_0) devient un nouveau élément double (u_0, v_0, v'_0) et l'équation fonctionnelle qui définit une courbe invariante par la substitution donnée devient une nouvelle équation fonctionnelle qui définit les courbes invariantes par la nouvelle substitution: si $v = \theta(u)$ est une solution de la nouvelle équation, contenant l'élément double (u_0, v_0, v'_0) , les équations:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(u, \theta(u)) \\ y &= \mu(u, \theta(u)) \end{aligned}$$

définiront y en fonction de x et la fonction ainsi définie sera une solution de l'équation fonctionnelle primitive.

Une équation fonctionnelle étant ainsi transformée en une autre, la recherche des solutions de la première équation et la recherche des solutions de la deuxième équation constituent deux problèmes équivalents.

On peut se demander alors si l'on ne pourrait pas, par une transformation ponctuelle, ramener le cas où $|S|$ est supérieur à 1 au cas précédemment étudié où $|S|$ est inférieur à 1. Or on constate que, si on effectue une transformation ponctuelle quelconque, S conserve la même valeur. Autrement dit:

S est un invariant de la substitution $(X, Y; x, y, y')$ pour le groupe ponctuel.

Pour établir cette proposition, nous allons appliquer la méthode de SOPHUS LIE et de M^r TRESSE pour le calcul des invariants différentiels des groupes continus de transformation: nous verrons ainsi que S est, pour le groupe ponctuel, le seul invariant distinct du premier ordre de la substitution en un élément double.

18. *Invariant différentiels du premier ordre de la substitution $(X, Y; x, y, y')$, en un élément double.* — Etant donnée la substitution

$$X = f(x, y, y') \quad Y = \varphi(x, y, y')$$

soient x_0, y_0, y'_0 les coordonnées d'un élément double. Nous voulons chercher une fonction des coordonnées de l'élément double et des valeurs prises par les dérivées partielles de f et de φ en cet élément double qui reste invariante lorsqu'on transforme la substitution par une transformation ponctuelle quelconque.

Nous allons montrer que la seule fonction distincte possédant cette propriété est la quantité S dont l'expression a été donnée au § 12.

$$S = \left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' \right) \frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}} \right]_0.$$

Tout autre invariant du premier ordre est de la forme $F(S)$, F étant une fonction arbitraire.

M^r TRESSE a montré que le calcul des invariants d'une multiplicité relativement à un groupe donné revient à la recherche d'une transformation déterminée du groupe qui permette de donner à la multiplicité une forme réduite: les coordonnées de l'élément réduit sont alors les unes des constantes fixes et les autres des invariants (*).

Le groupe que nous devons considérer est celui des transformations ponctuelles du plan: mais nous avons vu, au début de ce chapitre, qu'on pouvait, par une transformation ponctuelle, ramener toute substitution $(X, Y;$

(*) TRESSE, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformation* (Acta Mathematica, tome 18, 3.^e partie, Chap. I, § 1).

$x, y, y')$ à la forme :

$$\begin{cases} X = Sx + by + cy' + \dots \\ Y = Bx + Cy' + \dots \end{cases} \quad (14)$$

où S a la valeur donnée plus haut et b, c, B, C des valeurs qui ont été calculées (*); on peut, par suite, se borner à considérer le sous-groupe des transformations ponctuelles qui conservant à la substitution la forme précédente et chercher une fonction de S, b, c, B, C invariante par les transformations de ce sous-groupe (**). Soit :

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \beta v + \dots \\ y &= \alpha' u + \beta' v + \dots \end{aligned}$$

une transformation ponctuelle quelconque laissant invariant le point double $(0, 0)$. On déduit de ces formules de transformation :

$$y' = \frac{\alpha' + \beta' v' + \lambda u + \mu v}{\alpha + \beta v' + \dots} + \dots$$

λ, μ dépendant des termes du second degré de la transformation précédente. Pour que la substitution (14) conserve sa forme, il faut qu'à l'élément double $(0, 0, 0)$ corresponde le même élément, ce qui exige $\alpha' = 0$; les formules de transformation ont donc la forme :

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \beta v + \dots \\ y &= \beta' v + \dots \\ y' &= \alpha'' u + \beta'' v + \frac{\beta'}{\alpha} v' + \dots \end{aligned}$$

et la substitution (14) devient :

$$\begin{aligned} \alpha U + \beta V + \dots &= (S\alpha + c\alpha'')u + (S\beta + b\beta' + c\beta'')v + \frac{c\beta'}{\alpha}v' + \dots \\ \beta' V + \dots &= C\alpha''u + (B\beta + C\beta'')v + C\frac{\beta'}{\alpha}v' + \dots \end{aligned}$$

(*) Il faut supposer, bien entendu, $C \neq 0$, comme nous l'avons fait jusqu'ici.

(**) TRESSE, *ibid.*, § 3.

En résolvant ces équations par rapport à U, V , on voit immédiatement que l'on doit supposer $\alpha'' = 0$ pour que la transformation (14) conserve sa forme et les équations précédentes résolues par rapport à U, V deviennent alors:

$$U = Su + \frac{S\beta\beta' + b\beta'^2 + c\beta'\beta'' - B\beta\beta' - C\beta\beta''}{\alpha\beta'}v + \frac{c\beta' - C\beta}{\alpha^2}v' + \dots$$

$$V = \left(B + \frac{C\beta''}{\beta'}\right)v + \frac{C}{\alpha}v' + \dots$$

substitution de la forme:

$$\left. \begin{aligned} U &= Su + b_1v + c_1v' + \dots \\ V &= B_1v + C_1v' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

On voit déjà que S est un invariant: pour montrer que c'est le seul invariant distinct du premier ordre, il suffit de montrer qu'on peut choisir $\alpha, \beta, \beta', \beta''$ de façon que les autres coefficients b_1, c_1, B_1, C_1 de la substitution aient des valeurs déterminées. Cherchons à déterminer $\alpha, \beta, \beta', \beta''$ de façon que la substitution (15) ait la forme réduite suivante:

$$\left. \begin{aligned} U &= Su + v + \dots \\ V &= v' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Il suffit de poser:

$$\frac{C}{\alpha} = 1 \quad B + \frac{C\beta''}{\beta'} = 0 \quad c\beta' - C\beta = 0$$

$$\frac{S\beta\beta' + b\beta'^2 + c\beta'\beta'' - B\beta\beta' - C\beta\beta''}{\alpha\beta'} = 1$$

d'où:

$$\alpha = C \frac{\beta}{c} = \frac{\beta'}{C} = \frac{\beta''}{-B} \quad \text{et} \quad [Sc + bC - cB]\beta' = C^2.$$

On peut donc déterminer $\alpha, \beta, \beta', \beta''$, de façon à avoir le forme réduite (16), à condition que $Sc + bC - cB$ ne soit pas nul.

Ainsi S est le seul invariant distinct du premier ordre. De plus, la substitution peut se ramener en général à la forme réduite (16); enfin l'équation:

$$Sc - bC - cB = 0$$

est une équation invariante.

Les éléments doubles constituent en général une multiplicité dépendant de n paramètres: dans le plan, par exemple, ($n = 1$), les éléments doubles dépendent d'un seul paramètre et les points (x_0, y_{10}) forment une courbe; dans l'espace, les éléments doubles dépendent de deux paramètres et les points (x_0, y_{10}, y_{20}) forment une surface, du moins dans le cas général.

20. Donnons d'abord une forme réduite à la substitution dans le domaine d'un point double. Posons:

$$x = x_0 + u \quad y_i = y_{i0} + y'_{i0} u + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

d'où l'on déduit:

$$y'_i = y'_{i0} + v'_i$$

et posons de même:

$$x = x_0 + U \quad Y_i = y_{i0} + y'_{i0} U + V_i.$$

La substitution (1) devient une substitution faisant correspondre le point (U, V_i) à l'élément (u, v_i, v'_i) . A l'élément double:

$$(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}; y'_{10}, y'_{20}, \dots, y'_{n0})$$

correspond dans la nouvelle substitution un élément dont toutes les coordonnées sont nulles et la substitution prend la forme suivante, dans laquelle on a encore désigné les variables par x, y au lieu de u, v , afin de simplifier les notations:

$$\left. \begin{aligned} X &= a_0 x + a_1 y_2 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n + \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \cdots + \alpha_n y'_n + \\ &\quad + F(x, y_i; y'_j) \\ Y_1 &= a_{0,1} x + a_{1,1} y_1 + a_{2,1} y_2 + \cdots + a_{n,1} y_n + \alpha_{1,1} y'_1 + \alpha_{2,1} y'_2 + \cdots + \\ &\quad + \alpha_{n,1} y'_n + F_1(x, y_i; y'_j) \\ . &. \\ Y_k &= a_{0,k} x + a_{1,k} y_1 + a_{2,k} y_2 + \cdots + a_{n,k} y_n + \alpha_{1,k} y'_1 + \alpha_{2,k} y'_2 + \cdots + \\ &\quad + \alpha_{n,k} y'_n + F_k(x, y_i; y'_j) \\ . &. \\ Y_n &= a_{0,n} x + a_{1,n} y_1 + a_{2,n} y_2 + \cdots + a_{n,n} y_n + \alpha_{1,n} y'_1 + \alpha_{2,n} y'_2 + \cdots + \\ &\quad + \alpha_{n,n} y'_n + F_n(x, y_i; y'_j). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Les expressions $F_k(x, y_i, y'_j)$ désignent des fonctions de $x, y_1, y_2, \dots, y_n$;

$y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ ayant des dérivées partielles du premier ordre que nous supposons nulles et continues à l'origine.

Les coefficients a et α , exprimés en fonction des coordonnées primitives $(x_0, y_{i0}; y'_{i0})$ de l'élément double, ont les valeurs suivantes, qu'on calcule immédiatement comme au Chap. I (§ 5):

$$\begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n} \right)_0 \\ \alpha_i &= \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)_0 \\ \alpha_i &= \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right)_0 \\ a_{0,k} &= \left[\frac{\partial f_k}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f_k}{\partial y_1} + \dots + y'_n \frac{\partial f_k}{\partial y_n} - y'_k \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n} \right) \right]_0 \\ a_{i,k} &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} - y'_k \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)_0 \\ \alpha_{i,k} &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial y'_i} - y'_k \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right)_0 \quad \left(\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right) = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

On peut encore transformer la substitution (2) de façon à faire disparaître les termes en x dans $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Considérons le déterminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{0,n} & \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Soient $A_0, A_1, \dots, A_n$ les coefficients de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans le développement de ce déterminant. Posons:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{A_1}{A_0} \frac{x^2}{2} + v_1 & y_2 &= \frac{A_2}{A_0} \frac{x^2}{2} + v_2 \dots & y_n &= \frac{A_n}{A_0} \frac{x^2}{2} + v_n \\ \text{d'où:} & & & & & \\ y'_1 &= \frac{A_1}{A_0} x + v'_1 & y'_2 &= \frac{A_2}{A_0} x + v'_2 \dots & y'_n &= \frac{A_n}{A_0} x + v'_n \end{aligned}$$

et pareillement:

$$Y_1 = \frac{A_1}{A_0} \frac{X^2}{2} + V_1 \quad Y_2 = \frac{A_2}{A_0} \frac{X^2}{2} + V_2 \dots \quad Y_n = \frac{A_n}{A_0} \frac{X^2}{2} + V_n.$$

$$X = \frac{\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n}{A_0} x + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + \dots + \alpha_1 y'_1 + \dots + \alpha_n y'_n + F(x, y_i; y'_j)$$

$$Y_k = \frac{\alpha_{0,k} A_0 + \alpha_{1,k} A_1 + \dots + \alpha_{n,k} A_n}{A_0} x + a_{1,k} y_1 + a_{2,k} y_2 + \dots + a_{n,k} y_n + \dots + \alpha_{1,k} y'_1 + \dots + \alpha_{n,k} y'_n + F_k(x, y_i; y'_j)$$

X est $\frac{\Delta}{A_0}$; la substitution devient, en posant $\frac{\Delta}{A_0} = S$:

$$\left. \begin{aligned} X &= Sx + a_1 y_1 + a_2 y_2 \cdots + a_n y_n + x_1 y'_1 + x_2 y'_2 \cdots + \\ &\quad + x_n y'_n + F(x, y_i; y'_j) \\ Y_1 &= a_{1,1} y_1 + a_{2,1} y_2 \cdots + a_{n,1} y_n + x_{1,1} y'_1 + x_{2,1} y'_2 \cdots + \\ &\quad + x_{n,1} y'_n + F_1(x, y_i; y'_j) \\ . &. \\ Y_n &= a_{1,n} y_1 + a_{2,n} y_2 \cdots + a_{n,n} y_n + x_{1,n} y'_1 + x_{2,n} y'_2 \cdots + \\ &\quad + x_{n,n} y'_n + F_n(x, y_i; y'_j). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$A_0, \quad A_{1,1}, \quad A_{2,2}, \quad A_{n,n}$$

21. *Courbes invariantes par la substitution (1).* — En suivant la même marche que dans le cas de deux variables, nous démontrerons que, *sous les hypothèses* $A_0 \neq 0$ et $|S| < 1$, il existe une courbe invariante:

$$y_1 = \psi_1(x) \quad y_2 = \psi_2(x) \dots y_n = \psi_n(x)$$

comme limite des antécédentes successives d'une courbe initiale contenant l'élément double et définie dans le domaine de cet élément.

Considérons un système de fonctions:

$$y_1 = \psi_{1,0}(x) \quad y_2 = \psi_{2,0}(x) \dots y_n = \psi_{n,0}(x)$$

définies dans l'intervalle $-h, +h$ et vérifiant dans cet intervalle les inégalités:

$$|\psi'_{1,0}(x)| < \delta \times |x| \quad |\psi'_{2,0}(x)| < \delta \times |x| \dots |\psi'_{n,0}(x)| < \delta \times |x|. \quad (4)$$

A ce système, la substitution (3) fait correspondre un système antécédent:

$$\psi_{1,1}(x) \quad \psi_{2,1}(x) \dots \psi_{n,1}(x)$$

et on démontrera comme au § 8 la proposition suivante:

On peut déterminer deux nombres positifs δ et h de façon que le système antécédent soit défini dans le même intervalle $-h, +h$ que le système donné et vérifie les mêmes inégalités:

$$|\psi'_{1,1}(x)| < \delta \times |x| \quad |\psi'_{2,1}(x)| < \delta \times |x| \dots |\psi'_{n,1}(x)| < \delta \times |x|.$$

Pour établir cette proposition, on résoudra d'abord le système des n dernières équations (3) par rapport à $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ ce qui est possible dans le domaine de l'origine puisque le déterminant A_0 est supposé différent de zéro. La substitution (3) prend alors la forme:

$$\begin{aligned} X &= Sx + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \dots + \alpha_n y_n + \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 \dots + \alpha_n y'_n + F(x, y_i; y'_j) \\ y'_k &= \gamma_{1,k} y_1 + \gamma_{2,k} y_2 \dots + \gamma_{n,k} y_n + \delta_{1,k} Y_1 + \delta_{2,k} Y_2 \dots + \delta_{n,k} Y_n + \\ &\quad + F_k(x, y_i; Y_j) \end{aligned}$$

analogue à la forme (7) du § 8. On déduira de là le système d'équations différentielles définissant la première antécédente et on démontrera la proposition énoncée en appliquant à ce système la méthode des approximations successives exactement de la même manière qu'au § 8.

De cette proposition, il résulte que tous les systèmes antécédents successifs sont définis dans un domaine commun $-h, +h$. Il reste à montrer que, dans ce domaine, *les antécédentes ont une limite et que cette limite constitue une courbe invariante par la substitution.*

A cet effet, on considérera, comme au § 11, deux systèmes de fonctions $\psi_{1,0}, \psi_{2,0}, \dots, \psi_{n,0}$ d'une part et $\theta_{1,0}, \theta_{2,0}, \dots, \theta_{n,0}$ d'autre part, vérifiant les iné-

galités (4); posons, pour abréger:

$$y_1 = \psi_{1,0}(x) \quad y_2 = \psi_{2,0}(x) \dots y_n = \psi_{n,0}(x) \quad \text{et} \quad z_1 = \theta_{1,0}(x) \\ z_2 = \theta_{2,0}(x) \dots z_n = \theta_{n,0}(x)$$

et soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ et $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ les antécédents de ces deux systèmes de fonctions. Soit σ le module maximum des quantités $|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|, \dots, |y_n - z_n|$ dans l'intervalle $-h, +h$; on démontrera aisément (voir § 11) que les inégalités:

$$|y_1 - z_1| < \sigma \quad |y_2 - z_2| < \sigma \dots |y_n - z_n| < \sigma$$

entraînent une inégalité de la forme:

$$|Y'_1 - Z'_1| + |Y'_2 - Z'_2| \dots + |Y'_n - Z'_n| < k(|Y_1 - Z_1| + \\ + |Y_2 - Z_2| \dots + |Y_n - Z_n|) + k'\sigma$$

k et k' étant des constantes dépendant de h et des données, c'est-à-dire des coefficients de la substitution donnée. Si l'on pose:

$$|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| \dots + |Y_n - Z_n| = u$$

et si on remarque que l'on a:

$$u' \leq |Y'_1 - Z'_1| + |Y'_2 - Z'_2| \dots + |Y'_n - Z'_n|$$

l'inégalité précédente entraîne:

$$u' < k u + k' \sigma$$

et on en déduit, comme au § 10:

$$u < k h e^{k'h} \sigma$$

ou:

$$|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| \dots + |Y_n - Z_n| < k h e^{k'h} \sigma$$

et, *a fortiori*:

$$|Y_i - Z_i| < k h e^{k'h} \sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La démonstration s'achève comme au § 11: Si on prend pour z_i la première antécédente de y_i et si on désigne par $Y_{i,p}$ la p^{e} antécédente de y_i , on déduit de là:

$$|Y_{i,p} - Y_{i,p+1}| < (k h e^{k'h})^p \sigma.$$

Or, on peut choisir h suffisamment petit pour que $kh e^{k^n}$ soit inférieur à 1 et ceci prouve la convergence uniforme de la série $\sum_p (Y_{i,p} - Y_{i,p+1})$ dans l'intervalle $-h, +h$ et on démontre de même que la série $\sum_p (Y'_{i,p} - Y'_{i,p+1})$ est uniformément convergente dans le même intervalle. Il en résulte que $Y_{i,p}$ et $Y'_{i,p}$ tendent uniformément vers des limites pour p infini. Le système des fonctions limites ainsi obtenu :

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$$

est indépendant des fonctions initiales et définit une courbe :

$$y_1 = \psi_1(x) \quad y_2 = \psi_2(x) \dots y_n = \psi_n(x)$$

invariante par la substitution donnée.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème du § 12.

THÉORÈME. *Etant donnés la substitution (1) et un élément double $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0}; y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{n,0})$ de cette substitution, posons :*

$$A_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y'_1} - y'_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y'_2} - y'_1 \frac{\partial f}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y'_n} - y'_1 \frac{\partial f}{\partial y'_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y'_1} - y'_n \frac{\partial f}{\partial y'_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y'_2} - y'_n \frac{\partial f}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y'_n} - y'_n \frac{\partial f}{\partial y'_n} \end{vmatrix},$$

et :

$$S = \frac{1}{A_0} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \dots + y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n} & \frac{\partial f}{\partial y'_1} \frac{\partial f}{\partial y'_2} \dots \frac{\partial f}{\partial y'_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dots + y'_n \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y'_1} \frac{\partial f_1}{\partial y'_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial y'_n} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \dots + y'_n \frac{\partial f_n}{\partial y_n} & \frac{\partial f_n}{\partial y'_1} \frac{\partial f_n}{\partial y'_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y'_n} \end{vmatrix}$$

expressions dans lesquelles on suppose $x, y_1, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ remplacés par les coordonnées de l'élément double. Supposons :

$$A_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad |S| < 1.$$

Il existe alors un système de fonctions $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ définies dans un

la substitution (3) conserve sa forme. Considérons l'équation:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - S & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} - S & \dots & \alpha_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0$$

et limitons-nous au cas général où cette équation a n racines distinctes $S_1, S_2, \dots, S_n$; nous devons supposer en outre que cette équation n'a pas de racines nulles, puisque le produit des racines est égal au signe près au déterminant A_0 que nous avons supposé non nul. Considérons la substitution linéaire:

$$Y_i = \alpha_{1,i} y'_1 + \alpha_{2,i} y'_2 \dots + \alpha_{n,i} y'_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On sait, par la théorie des substitutions linéaires, qu'on peut disposer des coefficients $\lambda_{k,i}$ de façon que la substitution précédente soit transformée en la suivante:

$$Z_1 = S_1 z'_1 \quad Z_2 = S_2 z'_2 \quad Z_n = S_n z'_n.$$

Il en résulte évidemment que la substitution (3) prend la forme suivante, où on a encore désigné les variables par y_i et Y_i , au lieu de z_i et Z_i :

$$\left. \begin{aligned} X &= Sx + b_1 y_1 + b_2 y_2 \dots + b_n y_n + \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 \dots + \beta_n y'_n + \dots \\ Y_i &= b_{1,i} y_1 + b_{2,i} y_2 \dots + b_{n,i} y_n + S_i y'_i + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier et les coefficients b et β étant des fonctions des coefficients α .

On peut se borner à considérer le sous-groupe des transformations ponctuelles qui conservent à la substitution cette forme (6) et chercher les invariants de la substitution (6) pour les substitutions de ce sous groupe; les invariants ainsi obtenus seront les invariants de la substitution (1) pour le groupe ponctuel général.

On reconnaît aisément que la transformation ponctuelle la plus générale qui conserve sa forme à la substitution (6) est la transformation sui-

vante, qui a été *prolongée* jusqu'aux dérivées du premier ordre:

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda u + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + \dots \\ y_i &= \lambda_{i,i} v_i + \dots \\ y'_i &= \mu_{1,i} v_1 + \mu_{2,i} v_2 + \dots + \mu_{n,i} v_n + \frac{\lambda_{i,i}}{\lambda} v'_i + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

Il faut disposer des coefficients de cette transformation de façon à donner à la substitution une forme réduite. Les n dernières équations de la substitution (6) deviennent, lorsqu'on applique à cette substitution la transformation (7):

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i} V_i &= (b_{1,i} \lambda_{1,1} + S_i \mu_{1,i}) v_1 + (b_{2,i} \lambda_{2,2} + S_i \mu_{2,i}) v_2 + \dots + \\ &+ (b_{n,i} \lambda_{n,n} + S_i \mu_{n,i}) v_n + \frac{S_i \lambda_{i,i}}{\lambda} v'_i + \dots \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Choisissons les coefficients λ et μ de façon que les termes en $v_1, v_2, \dots, v_n$ disparaissent: il suffit pour cela de choisir les coefficients $\mu_{k,i}$ de façon que l'on ait:

$$b_{k,i} \lambda_{k,i} + S_i \mu_{k,i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

ce qui donne:

$$\mu_{k,i} = - \frac{b_{k,i} \lambda_{k,i}}{S_i}.$$

Les coefficients $\mu_{k,i}$ seront donc déterminés lorsqu'on aura déterminé les coefficients $\lambda_{k,i}$ et les n dernières équations (6) deviennent:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{S_1}{\lambda} v'_1 + \dots \\ V_2 &= \frac{S_2}{\lambda} v'_2 + \dots \\ &\vdots \\ V_n &= \frac{S_n}{\lambda} v'_n + \dots \end{aligned}$$

Prenons pour λ la valeur $\lambda = S_1$. Alors les équations précédentes de-

viennent :

$$\begin{aligned} V_1 &= v'_1 + \dots \\ V_2 &= \frac{S_2}{S_1} v'_2 + \dots \\ &\vdots \\ V_n &= \frac{S_n}{S_1} v'_n + \dots \end{aligned}$$

Elles mettent déjà en évidence les invariants : $\frac{S_2}{S_1} \frac{S_3}{S_1} \dots \frac{S_n}{S_1}$. Il reste à déterminer les coefficients λ_j et $\lambda_{i,j}$. La transformation (7) devient, lorsqu'on y remplace les μ par leurs valeurs en fonction des $\lambda_{i,i}$:

$$\left. \begin{aligned} x &= S_1 u + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + \dots \\ y_i &= \lambda_{i,i} v_i + \dots \\ y'_i &= -\frac{\lambda_{1,1} b_{1,i}}{S_i} v_1 - \frac{\lambda_{2,2} b_{2,i}}{S_i} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{n,n} b_{n,i}}{S_i} v_n + \frac{\lambda_{i,i}}{S_1} v'_i + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7 \text{ bis})$$

et la première équation (6) devient, par cette transformation :

$$\begin{aligned} S_1 U &= -\lambda_1 v'_1 - \lambda_2 \frac{S_2}{S_1} v'_2 - \dots - \lambda_n \frac{S_n}{S_1} v'_n + S S_1 u + S \lambda_1 v_1 + S \lambda_2 v_2 + \dots + S \lambda_n v_n \\ &\quad + b_1 \lambda_{1,1} v_1 + b_2 \lambda_{2,2} v_2 + \dots + b_n \lambda_{n,n} v_n + \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 + \dots + \beta_n y'_n + \dots \end{aligned}$$

équation dans laquelle il faut supposer $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ remplacés par les valeurs tirées de (7 bis) en fonction de $v_1, v_2, \dots, v_n$; $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$. On peut disposer de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de façon à annuler les coefficients de $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$. Il faut pour cela :

$$\lambda_1 + \frac{\beta_1 \lambda_{1,1}}{S_1} = 0 \quad -\lambda_2 \frac{S_2}{S_1} + \beta_2 \frac{\lambda_{2,2}}{S_1} = 0 \dots \lambda_n \frac{S_n}{S_1} + \beta_n \frac{\lambda_{n,n}}{S_1} = 0$$

d'où :

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1 \lambda_{1,1}}{S_1} \quad \lambda_2 = \frac{\beta_2 \lambda_{2,2}}{S_2} \dots \lambda_n = \frac{\beta_n \lambda_{n,n}}{S_n}$$

et il n'y a plus qu'à calculer $\lambda_{1,1} \lambda_{2,2} \dots \lambda_{n,n}$.

Déterminons ces quantités par la condition que les coefficients de $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans U soient égaux à 1. On obtient ainsi les conditions :

$$\frac{S \beta_i \lambda_{i,i}}{S_i} + b_i \lambda_{i,i} - \frac{\beta_i \lambda_{i,i} b_{i,1}}{S_1} - \frac{\beta_2 \lambda_{i,i} b_{i,2}}{S_2} \dots - \frac{\beta_n \lambda_{i,i} b_{i,n}}{S_n} = S_i.$$

F étant une fonction arbitraire,

CHAPITRE VI.

COURBES INVARIANTES PAR UNE TRANSFORMATION DE CONTACT.

23. Nous rappellerons d'abord quelques propriétés classiques des transformations de contact dans le plan (*). Soit donnée la transformation

$$\left. \begin{aligned} Y &= f(x, y, y') \\ Y &= \varphi(x, y, y'). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

On en déduit:

$$Y' = \left. \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' \\ &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

de sorte que en général Y' dépend de x, y, y', y'' . La transformation est une *transformation de contact* si à deux courbes tangentes quelconques elle fait correspondre deux courbes tangentes ou, en d'autres termes, si Y' ne dépend que de x, y, y' . Il faut et il suffit pour cela que les fonctions f et φ vérifient l'identité:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' \right) \frac{\partial f}{\partial y'} \equiv 0$$

ou, en employant la notation usuelle dont nous avons déjà fait usage au chap. IV:

$$[f\varphi] \equiv 0.$$

Deux fonctions f et φ liées par cette relation sont dites *en involution*.

Si f et φ sont en involution, l'expression (2) de Y' ne dépend que de x, y, y' . Posons:

$$\theta(x, y, y') = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''}.$$

(*) Voir par exemple:

LIE-SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungs-transformationen* (Chap. III, §§ 1 et 2).

La transformation (1) est une transformation d'*élément* à *point*, mais si aux équations (1) on adjoint l'équation (2), on a une transformation d'*élément* à *élément*:

$$\left. \begin{aligned} X &= f(x, y, y') \\ Y &= \varphi(x, y, y') \\ Y' &= \theta(x, y, y') \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

et c'est de cette façon qu'on définit en général une transformation de contact.

Dans l'étude des courbes invariantes par une transformation de contact, nous prendrons la transformation, soit sous la forme (1), soit sous la forme (3): dans le premier cas, nous aurons ainsi une transformation de la nature de celles que nous avons étudiées dans cette deuxième partie; dans le deuxième cas, au contraire, nous aurons à nous servir des résultats de la première partie (itération à trois variables). Pour distinguer dans la suite la transformation (1) de la transformation (3), nous appellerons la transformation (1) une transformation de contact d'*élément* à *point* ou transformation $(X, Y; x, y, y')$ et la transformation (3) une transformation de contact d'*élément* à *élément* ou transformation $(X, Y, Y'; x, y, y')$.

Relativement aux fonctions en involution, nous rappellerons encore les résultats classiques suivants:

Si f et φ sont deux fonctions en involution, les équations:

$$f(x, y, y') = \text{const.} \quad \varphi(x, y, y') = \text{const.}$$

sont deux intégrales premières de la même équation différentielle du second ordre:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0.$$

Toute autre intégrale première de cette équation est une fonction arbitraire de f et de φ .

Enfin si on élimine y' entre les deux équations différentielles:

$$f(x, y, y') = a \quad \varphi(x, y, y') = b$$

on obtient une équation

$$\omega(x, y, a, b) = 0$$

qui définit une intégrale commune aux deux équations différentielles.

§ 24. Considérons d'abord la transformation de contact donnée comme une transformation $(X, Y; x, y, y')$: elle est alors définie par les équations (1) et elle possède une infinité d'éléments doubles (x_0, y_0, y'_0) définis par les équations:

$$f(x_0, y_0, y'_0) = x_0 \quad \varphi(x_0, y_0, y'_0) = y_0.$$

Nous entendons ici les mots « élément double » au sens que nous leur avons donné au Chap. IV (§ 4). Si, au contraire, nous considérons la transformation comme une transformation $(X, Y, Y'; x, y, y')$, il faudrait entendre par « élément double » un élément vérifiant non seulement les deux équations précédentes, mais aussi la suivante:

$$\theta(x_0, y_0, y'_0) = y'_0.$$

Nous supposons actuellement qu'il s'agit d'un élément qui est double pour (1) sans être double pour (3), de sorte que l'on a:

$$\theta(x_0, y_0, y'_0) \neq y'_0.$$

En se reportant à la valeur de $\theta(x, y, y')$ donnée plus haut, on voit qu'on peut mettre $\theta(x, y, y')$ sous l'une des formes suivantes:

$$\theta(x, y, y') = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'}$$

de sorte que l'inégalité précédente revient à la suivante:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \neq 0$$

ou, avec les notations du § 12:

$$C' \neq 0.$$

§ 25. *Courbes invariantes par la transformation* $(X, Y; x, y, y')$. — Proposons-nous de trouver une courbe invariante par la transformation (1) et contenant l'élément double x_0, y_0, y'_0 : conformément à ce qu'il a été dit au paragraphe précédent, nous entendons par élément double un élément vérifiant seulement les deux équations (1), de sorte que C n'est pas nul.

La théorie des transformations de contact conduit à une *courbe* qui correspond au *point* unique x_0, y_0 : cette courbe s'obtient en éliminant y' entre les équations:

$$f(x, y, y') = x_0 \quad \varphi(x, y, y') = y_0.$$

C'est elle que nous trouvons ici comme solution de l'équation fonctionnelle:

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi'). \quad (E)$$

Il est essentiel de remarquer que cette solution est une *solution étrangère* et qu'elle ne fournit pas à proprement parler une courbe invariante par la transformation: à un élément variable x, y, y' de la courbe $y = \psi(x)$ correspond en effet un point fixe unique x_0, y_0 .

La solution étrangère ainsi obtenue existe évidemment, que C soit nul ou non. Mais il y a une différence essentielle entre les deux cas. Si on suppose, comme nous le faisons actuellement, que C n'est pas nul, les remarques faites au § 14 montrent qu'il ne passe par l'élément x_0, y_0, y'_0 qu'une seule solution de l'équation (E), tout au moins en supposant la transformation donnée et la solution cherchée analytiques: la solution étrangère est donc la *seule* solution de l'équation (E) contenant l'élément double. Supposons au contraire $C = 0$, ce qui revient à considérer un élément x_0, y_0, y'_0 double, non seulement pour la transformation $(X, Y; x, y, y')$, mais aussi pour la transformation $(X, Y, Y'; x, y, y')$: la *solution étrangère n'est plus nécessairement la seule* et nous démontrerons effectivement bientôt l'existence de deux autres solutions qui donneront de véritables courbes invariantes par la transformation de contact et contenant l'élément double.

26. *Exemples.* 1.^o Soit la transformation par polaires réciproques par rapport à la conique:

$$2y - x^2 = 0.$$

Cette transformation est définie par les équations:

$$X = y' \quad Y = x y' - y$$

et l'équation fonctionnelle correspondante est:

$$\psi[\psi(x)] = x \psi'(x) - \psi(x). \quad (E)$$

Les éléments doubles sont donnés par les équations:

$$x_0 = y'_0 \quad x_0 y'_0 = 2y_0$$

ou bien :

$$y_0 = \frac{x_0^2}{2} \quad y'_0 = x_0.$$

Ce sont les éléments formés d'un point de la conique et de la tangente en ce point. En éliminant y' entre les équations :

$$y' = x_0 \quad x y' - y = \frac{x_0^2}{2}$$

on obtient

$$y = x x_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

On vérifie immédiatement que la fonction $\psi(x)$ ainsi définie :

$$\psi(x) = x x_0 - \frac{x_0^2}{2}$$

vérifie l'équation (E).

L'équation précédente représente la tangente à la conique : à un élément variable de cette tangente la transformation fait correspondre un point unique de la même droite, le point de contact de la tangente.

On a ainsi la *solution étrangère* signalée en général au paragraphe précédent. Les véritables solutions du problème, c'est-à-dire les courbes invariantes par polaires réciproques, ont été déterminées, à un point de vue différent, par M^r DARBOUX dans son célèbre mémoire « *sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* » (*) M^r DARBOUX a traité le problème analogue dans l'espace, mais sa méthode subsiste évidemment pour le cas du plan. Au point de vue qui nous occupe, le problème reviendrait à trouver une courbe $y = \psi(x)$ invariante par la transformation :

$$X = y' \quad Y = x y' - y \quad Y' = x.$$

La fonction $\psi(x)$ devrait vérifier l'équation (E) et la nouvelle équation :

$$\psi'[\psi'(x)] = x. \quad (E')$$

Mais je me bornerai à signaler cette méthode, qui conduit aisément à la détermination de toutes les courbes identiques à leurs polaires réciproques.

(*) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Note IX).

2.° Soit la transformation de contact:

$$X = a x + y' \quad Y = 2 a y + y'^2.$$

L'équation fonctionnelle correspondante est:

$$\psi[a x + \psi'(x)] = 2 a \psi(x) + [\psi'(x)]^2. \quad (E)$$

Les éléments doubles ont pour coordonnées:

$$x = x_0 \quad y = \frac{x_0^2(1-a)^2}{1-2a} \quad y' = x_0(1-a)$$

x_0 étant arbitraire. On a une solution de l'équation (E), dépendant du paramètre arbitraire x_0 , en éliminant y' entre les équations:

$$a x + y' = x_0 \quad 2 a y + y'^2 = \frac{x_0^2(1-a)^2}{1-2a}$$

ce qui donne:

$$y = \psi(x) = \frac{a x_0^2}{2(1-2a)} + x_0 x - \frac{a x^2}{2}.$$

La vérification est immédiate.

27. *Courbes invariantes par la transformation de contact* ($X, Y, Y'; x, y, y'$). Considérons maintenant la transformation de contact donnée comme une transformation ($X, Y, Y'; x, y, y'$): conformément à ce qui a été dit au § 24, nous ne parlerons, cette fois, d'élément double que lorsqu'on aura les *trois* équations:

$$f(x_0, y_0, y'_0) = x_0 \quad \varphi(x_0, y_0, y'_0) = y_0 \quad \theta(x_0, y_0, y'_0) = y'_0.$$

La troisième équation peut s'écrire (§ 24):

$$C = 0.$$

Le cas que nous allons traiter est donc le cas exclu dans les deux paragraphes précédents, dans lequel la solution étrangère n'est plus nécessairement la seule contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0) .

Nous nous proposons donc de trouver une courbe invariante par la substitution (3) et contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0) . Soit $y = \psi(x)$ l'équation d'une pareille courbe. La fonction $\psi(x)$ devra vérifier les deux équations

tions fonctionnelles :

$$\psi [f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi') \quad (E)$$

$$\psi' [f(x, \psi, \psi')] = \theta(x, \psi, \psi'). \quad (E')$$

La fonction θ est liée à f et à φ par l'identité :

$$\theta(x, y, y') \equiv \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''}.$$

Le second membre de cette identité ne contient y'' qu'en apparence, en réalité il est indépendant de y'' puisque la transformation est une transformation de contact.

Si on dérive l'équation (E) par rapport à x , on obtient :

$$\psi' [f(x, \psi, \psi')] \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \psi' + \frac{\partial f}{\partial y'} \psi'' \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \psi' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \psi''$$

ou, à cause de l'identité précédente :

$$\psi' [f(x, \psi, \psi')] \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \psi' + \frac{\partial f}{\partial y'} \psi'' \right) = \theta(x, y, y') \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \psi' + \frac{\partial f}{\partial y'} \psi'' \right]$$

équation qui se décompose en deux dont l'une est l'équation fonctionnelle (E') et l'autre une équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \psi' + \frac{\partial f}{\partial y'} \psi'' = 0. \quad (E'')$$

Ainsi toute fonction qui vérifie l'équation (E) vérifie aussi, ou bien l'équation (E'), ou bien l'équation (E''), d'où deux cas à distinguer :

1.° Supposons que la fonction ψ vérifie les équations (E) et (E'') : elle ne constitue pas alors une solution du problème tel que nous le posons actuellement et il est facile de voir qu'une pareille solution n'est autre que la solution étrangère obtenue en § 25; en effet l'équation (E'') admet une intégrale première

$$f(x, \psi, \psi') = x_0$$

et l'équation (E) devient, en tenant compte de cette dernière équation :

$$\varphi(x, \psi, \psi') = \psi(x_0) = y_0.$$

En éliminant ψ' entre ces deux équations, on a bien la solution ψ obtenue au § 25.

2.° Supposons que la fonction ψ ne vérifie pas (E'') , elle doit alors vérifier (E') . Montrons tout d'abord que, réciproquement, si une courbe $y = \psi(x)$ contient l'élément double x_0, y_0, y'_0 et si $\psi(x)$ vérifie l'équation (E') , cette fonction $\psi(x)$ vérifie aussi l'équation (E) . On aura en effet, en multipliant les deux membres de l'équation (E') par $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi''$, la nouvelle équation :

$$\psi' [f(x, \psi, \psi')] \times \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi'' \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\psi' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\psi''$$

d'où

$$\psi [f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi') + C.$$

C étant une constante. L'équation devant être satisfaite pour $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0$, on a :

$$\psi(x_0) = y_0 + C$$

d'où $C = 0$.

Ainsi la fonction $\psi(x)$ qui vérifie l'équation (E') vérifie aussi l'équation (E) . Il résulte de là que, pour avoir la courbe cherchée invariante par la transformation (3), il suffit de considérer la substitution

$$\left. \begin{aligned} X &= f(x, y, y') \\ Y' &= \theta(x, y, y') \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

et de chercher une courbe invariante par cette substitution contenant l'élément (x_0, y_0, y'_0) double, non seulement pour la substitution (4), mais aussi pour la substitution (3). Si $y = \psi(x)$ est l'équation d'une pareille courbe, $\psi(x)$ vérifie en effet l'équation (E') et par suite l'équation (E) .

L'étude des substitutions de la forme (4) pourrait se faire comme celle des substitutions $(X, Y; x, y, y')$ qui a été faite au Chap. IV : on pourrait définir les antécédentes et les conséquentes successives d'une courbe initiale contenant l'élément double et chercher si ces antécédentes et ces conséquentes ont des limites. On pourrait étudier ainsi les équations fonctionnelles de la forme (E) , et cela, même dans le cas où il ne s'agirait pas d'une transformation de contact. Mais cette étude n'est pas indispensable pour le problème actuel, que nous aborderons par une autre méthode au paragraphe suivant et elle exigerait des développements un peu longs : aussi je me contenterai

d'énoncer, pour les substitutions de la forme (4), quelques résultats dont je me propose de développer les démonstrations dans un travail ultérieur. Ces résultats sont les suivants :

Etant donnée la substitution (4) et un élément double (x_0, y_0, y'_0) de cette substitution, formons l'équation :

$$S^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial y'} \right)_0 S + [f, \theta]_0 = 0.$$

Soient S', S'' les racines de cette équation supposées distinctes et non nulles :

1.^o Si $|S'|, |S''|$ sont tous deux inférieurs à 1, il existe une courbe invariante contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0) et définie dans un certain intervalle $x_0 - h, x_0 + h$: cette courbe peut s'obtenir comme limite des antécédentes successives d'une courbe contenant l'élément double.

2.^o Si $|S'|, |S''|$ sont tous deux supérieurs à 1, il existe une courbe invariante, limite des conséquentes successives.

3.^o Si $|S'|, |S''|$ comprennent 1, il existe deux courbes invariantes, l'une limite d'antécédentes et l'autre limite de conséquentes (*).

Si on applique la proposition précédente aux transformations de contact, on voit qu'on peut définir, suivant les cas, *une ou deux courbes invariantes par la transformation de contact (3) et contenant l'élément double x_0, y_0, y'_0 de cette transformation.*

Ce résultat est ainsi établi sans supposer l'analyticité des données et en supposant seulement, comme on l'a fait au Chap. IV pour d'autres substitutions, que les fonctions données f, φ, θ sont définies dans le domaine de (x_0, y_0, y'_0) et ont des dérivées du premier ordre continues dans ce domaine. Mais il n'est pas prouvé que les courbes ainsi obtenues soient les seules et, en particulier, pour le cas de $|S'|, |S''|$ inférieurs ou supérieurs tous deux à 1, il n'est pas prouvé qu'il n'existe pas une deuxième courbe invariante.

Dans la méthode du paragraphe suivant, nous supposerons les fonctions f, φ, θ analytiques et nous pourrions démontrer alors *qu'il existe deux courbes analytiques invariantes dans tous le cas* : en restreignant les hypothèses

(*) Ces résultats s'appliquent à toute substitution de la forme (4), même si cette substitution ne provient pas d'une transformation de contact.

faites sur les fonctions f, φ, θ , nous pourrions ainsi obtenir un résultat plus complet que par la méthode précédente.

Nous allons donc reprendre par cette deuxième méthode la recherche des courbes invariantes par la transformation (3).

28. *Deuxième méthode.* — Dans la transformation de contact (3), remplaçons y' par une variable z indépendante de x et de y : elle devient une substitution à trois variables:

$$\left. \begin{aligned} X &= f(x, y, z) \\ Y &= \varphi(x, y, z) \\ Z &= \theta(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (3 \text{ bis})$$

la fonction θ pouvant prendre l'une des formes suivantes:

$$\theta(x, y, z) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} z}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} z} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad (5)$$

Nous allons appliquer à cette substitution les résultats de Chap. II sur l'itération à trois variables.

Si on a obtenu une courbe plane $y = \psi(x)$ invariante par la transformation de contact (3), on en déduit une courbe de l'espace: $y = \psi(x)$ $z = \psi'(x)$ invariante par la transformation ponctuelle (3 bis).

Réciproquement, supposons qu'on ait obtenu une courbe analytique invariante par la substitution (3 bis) et passant par le point double (x_0, y_0, y'_0) de cette substitution: on sait qu'il y en a trois en général (Chap. II). Soient $y = \psi(y)$ $z = \chi(x)$ les équations d'une pareille courbe. Peut-on en déduire que la courbe plane $y = \psi(x)$ est invariante par la transformation de contact (3)? La question revient à chercher si $\chi(x)$ est nécessairement la dérivée de $\psi(x)$: nous montrerons que cette condition n'est satisfaite que par deux des trois courbes invariantes et non pas par la troisième.

29. *Forme réduite.* — Donnons d'abord une forme réduite de la transformation de contact dans le domaine de l'élément double (x_0, y_0, y'_0) . Par un changement de variables, on peut toujours amener l'élément double à avoir ses trois coordonnées nulles et les deux premières équations (3) ont alors la forme:

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cy' + F(x, y, y') \\ Y &= Ax + By + Cy' + \Phi(x, y, y'). \end{aligned}$$

Nous avons obtenu au Chap. IV (§ 5) les expressions de a, b, c, A, B, C en fonction des coordonnées primitives (x_0, y_0, y'_0) de l'élément double. En se reportant à ces valeurs, on voit que l'on a en particulier :

$$A = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' - y' \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \right]_0$$

$$C = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 \quad a = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_0 \quad c = \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0.$$

Actuellement, on a :

$$A = 0 \quad C = 0$$

car l'élément double (x_0, y_0, y'_0) vérifie l'équation $y'_0 = \theta(x_0, y_0, y'_0)$ qui peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$y'_0 = \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'} \right)_0 = \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}} \right)_0.$$

De plus, pour pouvoir appliquer les résultats obtenus dans l'étude de l'itération à trois variables, il faut supposer que dans le domaine de (x_0, y_0, y'_0) les fonctions f, φ, θ sont holomorphes et, d'après les formes (5) de la fonction θ , il faut que $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0$ ne soient pas nuls en même temps (*), afin que l'on puisse employer l'une au moins des deux formes (5) de la fonction θ : il en résulte qu'on doit supposer que a et c ne sont pas nuls en même temps.

(*) Les conditions $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_0 = 0$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 = 0$ expriment, en général, que y'_0 n'est pas infini : elles dépendent donc de l'orientation des axes de coordonnées. Le seul cas qui reste ainsi à étudier est celui où l'on a en même temps :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right)_0 = 0.$$

Les éléments doubles vérifiant simultanément ces 4 équations sont des éléments singuliers dans le domaine desquels une étude particulière serait nécessaire.

Les équations réduites sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} X &= a x + b y + c y' + F(x, y, y') \\ Y &= B y + \Phi(x, y, y') \end{aligned}$$

a et c n'étant pas nuls tous les deux.

On déduit de ces équations Y' sous les deux formes suivantes :

$$Y' = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(B + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) y'}{a + \frac{\partial F}{\partial x} + \left(b + \frac{\partial F}{\partial y}\right) y'} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y'}}{c + \frac{\partial F}{\partial y'}}. \quad (6)$$

On emploiera la première si a n'est pas nul et la deuxième si c n'est pas nul et on pourra, dans les deux cas, développer Y' en série ordonnée suivant les puissances de x, y, y' , dans le domaine de l'origine. Examinons successivement les deux cas.

1.° Supposons $c \neq 0$ et employons la deuxième forme de Y' . On a, pour le développement de Y' , une expression de la forme :

$$Y' = \alpha x + \beta y + \gamma y' + \dots$$

α, β, γ ayant les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y'} \right)_0, \quad \beta = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial y'} \right)_0, \quad \gamma = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} \right)_0.$$

Ces coefficients α, β, γ et les coefficients a, b, c, B , ne sont pas d'ailleurs indépendants.

On a en effet l'identité :

$$\left(a + \frac{\partial F}{\partial x} + b y' + \frac{\partial F}{\partial y} y' \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y'} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + B y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' \right) \left(c + \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \equiv 0 \quad (7)$$

qui exprime que la transformation est une transformation de contact. En dérivant cette identité par rapport à y' et en remplaçant ensuite x, y, y' par zéro, on obtient :

$$a \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} \right)_0 - c \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial y'} \right)_0 - c B = 0$$

ou bien :

$$a \gamma - c \alpha = B.$$

On voit d'ailleurs aisément que cette relation est la seule existant entre les coefficients des termes du premier degré en x, y, y' dans le cas général.

Ainsi, en supposant $c \neq 0$, la transformation prend la forme réduite:

$$\left. \begin{aligned} X &= f(x, y, y') = ax + by + cy' + \dots \\ Y &= \varphi(x, y, y') = By + \dots \\ Y' &= \theta(x, y, y') = \alpha x + \beta y + \gamma y' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

les coefficients étant liés par la relation:

$$a\gamma - c\alpha = B.$$

2.° Supposons $a \neq 0$. On emploiera alors la première forme (6) de Y' et on aura:

$$Y' = \alpha x + \beta y + \gamma y' + \dots$$

α, β, γ ayant les valeurs:

$$\alpha = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0, \quad \beta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0, \quad \gamma = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y'} + B \right)_0.$$

Si on dérive les deux membres de l'identité (7) par rapport à x et si on remplace x, y, y' par zéro, on obtient la relation:

$$a \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y'} \right)_0 - c \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 = 0$$

ou bien:

$$a(a\gamma - B) - c\alpha = 0$$

ou encore:

$$a\gamma - c\alpha = B.$$

Ainsi, on obtient encore dans ce cas la même forme réduite (8) pour la transformation de contact.

30. Dans la transformation (8), remplaçons maintenant y' par une variable z indépendante de x et de y , comme nous l'avons indiqué au § 28. Elle devient une substitution à trois variables:

$$\left. \begin{aligned} X &= f(x, y, z) = ax + by + cz + \dots \\ Y &= \varphi(x, y, z) = By + \dots \\ Z &= \theta(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8 \text{ bis})$$

avec la relation:

$$a\gamma - c\alpha = B.$$

L'équation en S relative à cette substitution (Voir Chap. II est la suivante:

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ 0 & B-S & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma-S \end{vmatrix} = 0.$$

ou bien:

$$(B-S)[(a-S)(\gamma-S) - c\alpha] = 0$$

ou encore

$$(B-S)[S^2 - (a+\gamma)S + B] = 0$$

à cause de la relation $a\gamma - c\alpha = B$.

L'une des racines est $S=B$. Soient S' , S'' les deux autres racines. Remarquons que l'on a:

$$S = S'S''.$$

Ainsi, l'une des racines de l'équation en S relative à un élément double d'une transformation de contact est égale au produit des deux autres.

Remarquons aussi que l'équation du second degré qui admet pour racines S' , S'' n'est autre que l'équation en S considérée au § 27, dans la première méthode indiquée pour la recherche des courbes invariantes (*).

Pour appliquer le théorème fondamental du Chap. II sur les courbes invariantes par une substitution, nous devons supposer que les racines de l'équation en S sont distinctes, ont des modules différents de zéro et de 1, et enfin qu'aucune des racines n'est une puissance entière d'une autre racine: à cause de la relation $S = S'S''$, cette dernière hypothèse revient à supposer qu'aucune des deux racines S' , S'' n'est une puissance entière de l'autre. Nous ferons donc ces diverses hypothèses.

Il existe alors trois courbes analytiques invariantes par la substitution (8 bis) et passant par l'origine. Cherchons les tangentes à ces trois courbes à l'origine.

La tangente à la courbe invariante C correspondant à la racine $S=B$ a pour équations:

$$(a-B)x + by + cz = 0$$

$$\alpha x + \beta y + (\gamma-B)z = 0.$$

(*) Dans cette équation, le terme indépendant $[f, \theta]_0$ se réduit en effet à $a\gamma - c\alpha$, c'est-à-dire à B .

Remarquons qu'elle n'est pas située dans le plan $y=0$, car il faudrait pour cela:

$$(a-B)(\gamma-B)-c\alpha=0$$

et l'une des racines S' S'' serait égale à B : l'équation du troisième degré en S aurait une racine double, contre l'hypothèse.

Considérons maintenant la tangente à la courbe invariante C' correspondant à la racine S' . Elle a pour équations:

$$(a-S')x + b y + c z = 0$$

$$(B-S')y = 0$$

$$\alpha x + \beta y + (\gamma-S')z = 0$$

équations qui se réduisent aux suivantes:

$$(a-S')x + c z = 0 \quad y = 0.$$

La tangente est donc située dans le plan $y=0$. Il en est de même pour la tangente à la courbe invariante C'' correspondant à la racine S'' .

Ainsi, pour deux des trois courbes analytiques invariantes par la substitution (8 bis) et passant par l'origine, on a $y'_0=0$: soient C' , C'' ces deux courbes; pour la troisième courbe C au contraire, on a $y'_0 \neq 0$.

Ceci posé, soient $y=\psi(x)$ $z=\chi(x)$ les équations de l'une quelconque de ces trois courbes C , C' , C'' . Nous allons démontrer que, pour C' et C'' , la fonction $\chi(x)$ est la dérivée de $\psi(x)$, mais que pour C il n'en est pas ainsi: il en résultera qu'il existe deux courbes analytiques invariantes par la transformation de contact (8) et deux seulement.

Si on suppose en effet y et z remplacés dans les équations (8 bis) par les coordonnées $\psi(x)$, $\chi(x)$ d'un point de l'une des trois courbes C , C' , C'' , on a:

$$\left. \begin{aligned} Y' &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'} \\ Z &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial z} z'} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Rappelons que, dans cette dernière équation, z' n'entre que d'une façon apparente, puisque la transformation (8) est une transformation de contact.

Supposons d'abord que y et z désignent les coordonnées d'un point de l'une des deux courbes C' , C'' . Pour ces courbes, on a:

$$y'_0 = z'_0 = 0.$$

Prenons les dérivées successives par rapport à x des deux membres des équations (9) et remplaçons x par zéro dans les relations ainsi obtenues. Pour $x=0$, Y , Y' , Y'' ,... et Z , Z' , Z'' ,... deviennent égaux respectivement à y , y' , y'' ,... et à z , z' , z'' ,... On obtient donc ainsi des relations entre y'_0 , y''_0 , y'''_0 ,... et z'_0 , z''_0 , z'''_0 ,... On a:

$$Y'' = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} z' + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} y' z' + \right.}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'\right)^3} \\ \left. + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z''\right) - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial z} z''\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'\right)^3}.$$

Si on remplace x par zéro, on obtient une relation entre y'_0 , z'_0 , y''_0 , z''_0 qui, résolue par rapport à y''_0 , prend la forme:

$$y''_0 = \lambda(y'_0, z'_0, z''_0).$$

La deuxième équation (9) ne diffère de la première que par le changement de y' en z et de Y' en Z : donc, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x et en remplaçant x par zéro, on obtient:

$$z'_0 = \lambda(z_0, z'_0, z''_0).$$

En comparant les deux relations ainsi obtenues, et en tenant compte de la relation $y'_0 = z'_0$, on voit que l'on a:

$$y''_0 = z'_0.$$

Je dis qu'en général on aura de même:

$$y^{(n)}_0 = z^{(n-1)}_0.$$

Supposons la proposition établie pour toutes les valeurs de n jusqu'à $n = p - 1$ et démontrons qu'elle subsiste pour $n = p$.

En dérivant p fois la première équation (9) par rapport à x , en remplaçant x par zéro et en résolvant par rapport à $y_0^{(p)}$ la relation ainsi obtenue (*), on obtient une égalité de la forme:

$$y_0^{(p)} = \lambda_p(y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(p-1)}; z'_0, z''_0, \dots, z_0^{(p)}).$$

Dérivons maintenant la deuxième équation (9) par rapport à x : comme elle ne diffère de la première que par le changement de y' en z et de Y' en Z , ce qui entraîne le changement de $y^{(k)}$ en $z^{(k-1)}$ et de $Y^{(k)}$ en $Z^{(k-1)}$, on obtiendra, pour $x = 0$:

$$z_0^{(p-1)} = \lambda_p(z_0, z'_0, \dots, z_0^{(p-2)}; z'_0, z''_0, \dots, z_0^{(p)})$$

et comme on a, par hypothèse:

$$y'_0 = z_0 \quad y''_0 = z'_0, \dots, y_0^{(p-1)} = z_0^{(p-2)}$$

on voit qu'on aura aussi:

$$y_0^{(p)} = z_0^{(p-1)}$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, les équations de chacune des courbes C et C' sont de la forme:

$$y = \psi(x) = y''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + y'''_0 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$z = \chi(x) = y''_0 x + y'''_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

et $\chi(x)$ est bien la dérivée de $\psi(x)$.

Il en résulte que la courbe plane $y = \psi(x)$ est bien invariante par la transformation de contact (8).

(*) Il est aisé de voir que la relation ainsi obtenue et les relations analogues obtenues précédemment déterminent bien d'une façon univoque les quantités $y''_0, y'''_0, \dots, y_0^{(p)}$. Ces relations, jointes aux relations analogues obtenues en partant de la deuxième équation (9), sont en effet les équations servant à effectuer le calcul formel des coefficients $y''_0, y'''_0, \dots$ et $z''_0, z'''_0, \dots$ des équations d'une courbe invariante, lorsqu'on a déjà calculé les coefficients y'_0 et z'_0 . Or, d'après les résultats du Chap. II, les coefficients y'_0, z'_0 une fois calculés, il y a une courbe invariante et une seule pour laquelle y'_0, z'_0 ont les valeurs ainsi calculées: il en résulte évidemment que les équations que nous considérons peuvent être résolues de proche en proche par rapport à $y''_0, y'''_0, \dots, y_0^{(p)}$ et qu'elles ont chacune une solution et une seule.

Ce raisonnement s'applique aux deux courbes C' et C'' , mais il ne s'applique pas à la courbe C , car pour cette dernière, on a:

$$y'_0 = z_0$$

puisque z_0 est nul et que y'_0 n'est pas nul.

Ainsi la courbe C qui est invariante par la transformation ponctuelle (8 bis) ne fournit pas une courbe plane invariante par la transformation de contact (8).

Les résultats des derniers paragraphes sont résumés dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME. — *Soit donnée une transformation de contact:*

$$X = f(x, y, y') \quad Y = \varphi(x, y, y') \quad Y' = \theta(x, y, y').$$

Soit (x_0, y_0, y'_0) un élément double de la transformation dans le domaine duquel les coefficients f, φ, θ sont holomorphes. Supposons que l'équation en S :

$$S^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial y'} \right) S + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 = 0$$

ait ses racines distinctes, de module différent de 0 et de 1 et enfin qu'aucune des racines ne soit une puissance entière de l'autre racine (). Il existe alors deux courbes analytiques et deux seulement invariantes par la transformation de contact et contenant l'élément double (x_0, y_0, y'_0) . Si $y = \psi(x)$ est l'équation d'une de ces courbes, la fonction $\psi(x)$ vérifie, dans le domaine de x_0 , les deux équations fonctionnelles:*

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi') \quad (E)$$

$$\psi'[f(x, \psi, \psi')] = \theta(x, \psi, \psi'). \quad (E')$$

31. *Exemple.* — Soit la transformation de contact:

$$X = ax + y' \quad Y = 2ay + y'^2 \quad Y' = 2y'$$

(*) Il n'y a pas à faire intervenir la troisième racine $S=B$ dans ces hypothèses, puisque la courbe invariante de l'espace correspondant à cette racine ne fournit pas une courbe plane invariante par la transformation de contact: si, par suite d'une hypothèse faite sur cette racine, la courbe invariante de l'espace qui lui correspond venait à disparaître, cela ne changerait donc pas les résultats relatifs à la transformation de contact.

et soit à déterminer les courbes analytiques invariantes contenant l'élément double $x_0 = y_0 = y'_0 = 0$.

Considérons la substitution:

$$X = a x + z \quad Y = 2 a y + z^2 \quad Z = 2 z.$$

On détermine aisément les courbes invariantes passant par l'origine, en employant la méthode des coefficients indéterminés et on trouve les trois courbes suivantes:

$$1^{\text{re}} \text{ courbe : } x = 0 \quad z = 0$$

$$2^{\text{e}} \text{ courbe : } y = 0 \quad z = 0$$

$$3^{\text{e}} \text{ courbe : } y = \frac{(2-a)x^2}{2} \quad z = (2-a)x.$$

Pour les deux dernières courbes, z est la dérivée de y par rapport à x ; ces deux dernières courbes donnent deux courbes planes invariantes par la transformation de contact:

$$1^{\text{re}} \text{ courbe : } y = 0$$

$$2^{\text{e}} \text{ courbe : } y = \frac{(2-a)x^2}{2}.$$

Ces deux fonctions vérifient à la fois les deux équations fonctionnelles:

$$\psi [a x + \psi' (x)] = 2 a \psi (x) + [\psi' (x)]^2$$

$$\psi' [a x + \psi' (x)] = 2 \psi' (x).$$

La vérification est immédiate.

On a trouvé en outre au § 26 une infinité de solutions vérifiant la première de ces équations sans vérifier la deuxième.

32. *Équations différentielles invariantes par une transformation de contact.* — Étant donnée la transformation de contact (3), on peut se proposer de chercher une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ invariante par la transformation. Une pareille équation possède la propriété suivante: étant donnée une courbe intégrale de l'équation, la transformation de contact appliquée à cette courbe donne une nouvelle courbe intégrale de la même équation.

Le problème revient à la recherche d'une surface invariante par la substitution à trois variables (3 bis). Soit (x_0, y_0, y'_0) un point double de

cette substitution: l'équation en S relative à ce point a trois racines dont l'une S est égale au produit des deux autres S', S'' . D'après les résultats du Chap. II (§§ 18 et 19) sur les surfaces invariantes, il y a en général une surface invariante contenant l'élément double et correspondant à la racine S' , pourvu que $|S|$ et $|S''|$ soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1; il y a de même une surface invariante correspondant à la racine S'' pourvu que $|S|$ et $|S'|$ soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à 1. Mais pour la troisième racine S , on est arrêté dans le calcul formel des coefficients à cause de la relation $S = S'S''$: il n'y a donc pas en général de surface invariante correspondant à cette racine; mais il peut arriver cependant que, pour une transformation particulière, il y ait, non pas impossibilité, mais indétermination dans le calcul formel: dans ce cas, on aurait une infinité de développements vérifiant formellement l'équation fonctionnelle qui définit la surface invariante et il resterait à voir si les développements obtenus sont convergents. La même question se pose d'ailleurs dans le Chap. II, toutes les fois qu'il y a entre S, S', S'' une relation de la forme $S = S'^\alpha S''^\beta$ et nous n'avons pas étudié ce cas au Chap. II. Nous nous bornerons donc à conclure en remarquant que *toutes les fois qu'on a pu obtenir une surface invariante par la transformation (3 bis), on en déduit, en remplaçant z par y' dans l'équation de cette surface, une équation différentielle du premier ordre qui admet la transformation de contact (3)*. Ce résultat est général pourvu qu'on considère, comme le fait SOPHUS LIE, une équation différentielle du premier ordre comme une équation entre les coordonnées x, y, y' d'un élément: l'énoncé s'applique alors, même au cas où l'équation d'une surface invariante ne contiendrait pas z .

Exemple. — Soit la transformation déjà considérée au paragraphe précédent:

$$X = ax + y' \quad Y = 2ay' - y'^2 \quad Y' = 2y'.$$

Si on y remplace y' par z , on a la transformation ponctuelle:

$$X = ax + z \quad Y = 2az - z^2 \quad Z = 2z$$

qui admet l'origine pour point double.

Ramenons d'abord cette transformation à avoir la forme canonique indiquée au Chap. II. Pour cela, il suffit de poser:

$$u = x + \frac{z}{a-2} \quad \text{et} \quad U = X + \frac{Z}{a-2}.$$

La transformation devient :

$$U = \alpha u \quad Y = 2\alpha y + z^2 \quad Z = 2z.$$

Les racines de l'équation en S sont α , 2 et 2α .

A la racine $S' = 2$ correspond la surface invariante tangente au plan xOy :

$$z = 0.$$

A la racine $S'' = \alpha$ correspond la surface invariante tangente au plan yOz :

$$u = 0.$$

Enfin cherchons une surface invariante tangente au plan xOz . Soit :

$$y = \psi(u, z) = \alpha u^2 + 2\beta uz + \gamma z^2 + \dots$$

l'équation de cette surface. La fonction ψ doit vérifier l'équation fonctionnelle :

$$\psi(\alpha u, 2z) = 2\alpha \psi(u, z) + z^2.$$

On reconnaît aisément que tous les coefficients de $\psi(u, z)$ doivent être nuls sauf γ qui est égal à $\frac{1}{2(2-\alpha)}$ et β qui est arbitraire : ainsi on est dans le cas où le calcul des coefficients conduit à une indétermination et on trouve une infinité de surfaces analytiques invariantes tangentes au plan xOz et ayant pour équation générale :

$$y = \beta uz + \frac{z^2}{2(2-\alpha)}.$$

Si on revient aux variables x, y, z , on a les surfaces invariantes suivantes :

$$z = 0 \quad x = \frac{z}{2-\alpha} \quad y = \beta xz + \frac{1-2\beta}{2(2-\alpha)} z^2$$

et si on revient à la transformation de contact dans le plan, on voit qu'on obtient les équations différentielles suivantes invariantes par la transformation de contact :

$$y' = 0 \quad x = \frac{y'}{2-\alpha} \quad y = \beta xy' + \frac{1-2\beta}{2(2-\alpha)} y'^2$$

β étant une constante arbitraire et la méthode employée montre que *ce sont les seules équations différentielles admettant la transformation de contact proposée*, vérifiées pour $x=0$ $y=0$ $y'=0$ et telles que l'une au moins des trois quantités x , y , y' soit une fonction holomorphe des deux autres quantités, dans le domaine de $x=y=y'=0$.

Toute courbe intégrale de l'une de ces équations se transforme, lorsqu'on lui applique la transformation de contact donnée, en une nouvelle courbe intégrale de la même équation: il peut arriver que la courbe intégrale considérée coïncide avec sa transformée, c'est alors une des courbes invariantes trouvées au paragraphe précédent.

Il faut supposer, dans ce qui précède, qu'aucune des quantités a , 2 et $2a$ n'est le produit de deux puissances entières des deux autres quantités: dans ce cas, il peut y avoir une nouvelle indétermination dans le calcul formel des coefficients, d'après la théorie générale du Chap. II et les équations obtenues ne sont plus les seules répondant à la question: enfin si $a=2$, les résultats précédents tombent en défaut, mais nous nous bornerons au cas général.

33. *Convergence irrégulière et cycles de courbes invariantes.* — La notion de convergence irrégulière dont nous avons parlé dans l'étude de l'itération à deux ou à trois variables (1^{ère} partie §§ 15 et 23) s'étend sans difficulté aux transformations de contact.

Considérons une transformation de contact T^1 et ses puissances T^2 , T^3 , ... On peut se proposer de chercher une courbe qui soit invariante par la transformation T^p sans être invariante par les transformations T^n d'indice n inférieur à p . Une pareille courbe C est transformée successivement par la transformation T^1 en des courbes C_2 , C_3 , ..., C_p , C_{p+1} , ... et la courbe C_{p+1} coïncide avec C_1 , car elle pourrait se déduire de C_1 par la transformation T^p qui laisse C_1 invariante: *on a ainsi un cycle de p courbes se permutant circulairement par la transformation T^1* . Au point de vue purement analytique, nous formons ainsi *un cycle de p fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_p(x)$ vérifiant un système d'équations fonctionnelles*.

Cette notion de convergence irrégulière s'applique, soit qu'on considère la transformation T^1 comme une transformation $(X, Y; x, y, y')$ d'élément à point (§§ 24 à 26), soit qu'on la considère comme une transformation d'élément à élément (§ 27 et suivants). Supposons que la transformation soit celle définie par les équations (3) ou (3 bis): dans le premier cas, on définit ainsi un cycle de fonctions ψ , ψ_2 , ..., ψ_p vérifiant le système d'équations fonction-

nelles

$$\psi_2 [f(x, \psi_1, \psi'_1)] = \varphi(x, \psi_1, \psi'_1) \quad (E_1)$$

$$\psi_3 [f(x, \psi_2, \psi'_2)] = \varphi(x, \psi_2, \psi'_2) \quad (E_2)$$

$\vdots$

$$\psi_p [f(x, \psi_{p-1}, \psi'_{p-1})] = \varphi(x, \psi_{p-1}, \psi'_{p-1}) \quad (E_{p-1})$$

$$\psi_1 [f(x, \psi_p, \psi'_p)] = \varphi(x, \psi_p, \psi'_p). \quad (E_p)$$

Dans le deuxième cas, les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ doivent vérifier, non seulement les équations $(E_1), (E_2), \dots, (E_p)$, mais aussi les équations:

$$\psi'_2 [f(x, \psi_1, \psi'_1)] = \theta(x, \psi_1, \psi'_1) \quad (E'_1)$$

$$\psi'_3 [f(x, \psi_2, \psi'_2)] = \theta(x, \psi_2, \psi'_2) \quad (E'_2)$$

$\vdots$

$$\psi'_1 [f(x, \psi_p, \psi'_p)] = \theta(x, \psi_p, \psi'_p). \quad (E'_p)$$

La résolution de ces systèmes d'équations fonctionnelles se ramène, comme on voit, à la résolution d'une ou de deux équations fonctionnelles définissant une courbe invariante par la transformation T^n : soit C_1 cette dernière courbe et $C_2, C_3, \dots, C_p$ les transformées successives de C_1 par la transformation T^1 . Si ces courbes ont respectivement pour équation les équations suivantes:

$$y = \psi_1(x) \quad y = \psi_2(x) \dots y = \psi_p(x)$$

les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ constituent une solution du système d'équations fonctionnelles données.

Rappelons enfin qu'on obtient, par de simples éliminations, une infinité de courbes invariantes par une transformation de contact considérée comme transformation $(X, Y; x, y, y')$ (§ 25). Il en résulte qu'on obtiendra par de simples éliminations une infinité de solutions du système formé par les équations $E_1, E_2, \dots, E_p$.

34. EXEMPLES. — 1.^o Soit la transformation de contact d'élément à point:

$$T_1 \begin{cases} X = x + y' \\ Y = 2y + y'^2 \end{cases}$$

et soit à trouver un cycle de deux courbes C_1, C'_1 se permutant par la transformation T_1 .

La transformation itérée T'^2 est la suivante :

$$T'_2 \left\{ \begin{array}{l} X = x + 3 y' \\ Y = 4 y + 6 y'^2. \end{array} \right.$$

Les éléments doubles de T'_2 ont pour coordonnées $x = \lambda$ $y = 0$ $y' = 0$, λ étant arbitraire. Pour obtenir une courbe invariante par T'_2 , il suffit (§ 25) d'éliminer y' entre les équations :

$$\begin{aligned} x + 3 y' &= \lambda \\ 4 y + 6 y'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination est :

$$y = -\frac{1}{6}(x - \lambda)^2. \quad (C_1)$$

C'est l'équation de la courbe C_1 . Si on applique à cette courbe la transformation T_1 , on obtient la courbe C_2 . On trouve immédiatement l'équation de cette courbe :

$$y = -(x - \lambda)^2. \quad (C_2)$$

Les deux courbes (C_1) et (C_2) se permutent par la transformation T_1 . Au point de vue purement analytique, les fonctions :

$$\psi(x) = -(x - \lambda)^2 \quad \text{et} \quad \theta(x) = -\frac{1}{6}(x - \lambda)^2$$

vérifient le système d'équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned} \psi[x + \theta'(x)] &= 2\theta(x) + [\theta'(x)]^2 \\ \theta[x + \psi'(x)] &= 2\psi(x) + [\psi'(x)]^2. \end{aligned}$$

On pourrait, de la même manière, chercher un cycle de p courbes se permutant circulairement par la transformation T_1 .

2.° Soit la transformation de contact d'élément à élément

$$T_1 \left\{ \begin{array}{l} X = a y' \\ Y = b(x y' - y) \\ Y' = \frac{b}{a} x \end{array} \right.$$

et soit à trouver un cycle de deux courbes se permutant par la transformation. La transformation itérée est la suivante :

$$T_2 \left\{ \begin{array}{l} X = b x \\ Y = b^2 y \\ Y' = b y'. \end{array} \right.$$

C'est une simple transformation ponctuelle prolongée. Elle admet les courbes invariantes $y = \lambda x^2$, λ étant arbitraire.

La courbe C_1 a pour équation :

$$y = \lambda x^2.$$

La courbe C_2 s'obtient en appliquant à C_1 la transformation T_1 , ce qui donne :

$$y = \frac{b x^2}{4 a^2 \lambda}.$$

Si on pose :

$$\psi(x) = \lambda x^2, \quad \theta(x) = \frac{b x^2}{4 a^2 \lambda}$$

les fonctions ψ et θ vérifient le système des quatre équations fonctionnelles :

$$\psi[a\theta'(x)] = b[x\theta'(x) - \theta(x)] \quad \psi'[a\theta'(x)] = \frac{b}{a} x$$

$$\theta[a\psi'(x)] = b[x\psi'(x) - \psi(x)] \quad \theta'[a\psi'(x)] = \frac{b}{a} x.$$

Vu et approuvé :

Paris, le 18 janvier 1906.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 18 janvier 1906.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS, .

L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.	Pages	1
PREMIÈRE PARTIE :		
CHAPITRE I. — L'itération à deux variables	»	9
CHAPITRE II. — L'itération à trois variables	»	38
CHAPITRE III. — L'équation de Schröder. — Analogies entre la théorie de l'itération et la théorie des points singuliers des équations différentielles.	»	55
DEUXIÈME PARTIE :		
CHAPITRE IV. — Les courbes invariantes par une substitution $(X, Y; x, y, y')$	»	71
CHAPITRE V. — Substitutions contenant plusieurs fonctions et leurs dérivées	»	101
CHAPITRE VI. — Courbes invariantes par une transformation de contact	»	113

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Déformation d'un milieu continu.

Vu et approuvé:

Paris, le 18 janvier 1906.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer:

Paris, le 18 janvier 1906.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE PARTIE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

PROPOSITIONS DOSSIER PAR LA FACULTE

